Fonction exponentielle

1 Définition et propriétés de $x \mapsto \exp(x) = e^x$

Définition 1

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On appelle cette fonction **la fonction exponentielle** ; elle est notée exp.

On note aussi $\exp(x) = e^x$: c'est la notation exponentielle.

$e = e^1 = \exp(1)$ est la constante de Néper ; une valeur approchée est $e \approx 2{,}718\,281\,828$

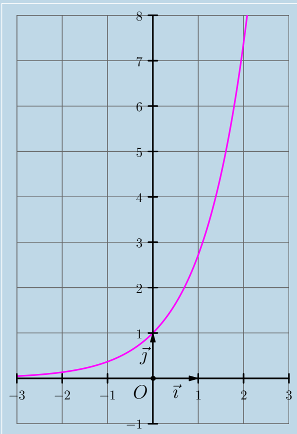
Démonstration : unicité.

Propriété 1

La fonction dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle : $\exp' = \exp$.

Propriété 2

- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $e^0 = 1$.
- La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, *i.e.* $a < b \Leftrightarrow e^a < e^b$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.



Propriété 3 : Relation fonctionnelle de la fonction exponentielle

a et b sont deux nombres réels. Alors

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

Propriété 4

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Propriété 5

On considère a et b des nombres réels et n un entier naturel. Alors

- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$;
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$;
- $e^{n \times a} = (e^a)^n$;
- $\sqrt{e^a} = e^{\frac{a}{2}}$.

‡ Propriété 6 : Croissances comparées

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x = 0$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\,\mathrm{e}^x = 0$, $(n > 0)$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$, $(n > 0)$.

2 Fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$

⊡ Définition 2

On considère u une fonction définie sur un intervalle I.
On créé une nouvelle fonction $\exp(u)$ que l'on note aussi e^u par $x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$.

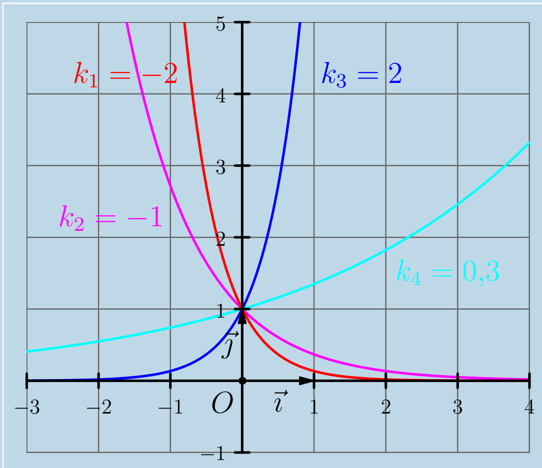
‡ Propriété 7

On considère u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors e^u est dérivable sur I et : $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$.
En outre, les fonctions u et e^u ont les mêmes variations sur I.

‡ Propriété 8

Une fonction de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{kx}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est $x \longmapsto k\,\mathrm{e}^{kx}$.
Les fonctions $x \longmapsto \mathrm{e}^{kx}$ vérifient l'équation différentielle $y' = ky$. Elles modélisent des phénomènes à évolution relative constante

- cas $k < 0$: radioactivité, décharge d'un condensateur ;
- cas $k > 0$: population où le taux d'accroissement naturel est constant.



‡ Propriété 9

Une fonction de la forme $x \longmapsto \mathrm{e}^{kx^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est $x \longmapsto 2kx\,\mathrm{e}^{kx^2}$.
Quand $k < 0$, la courbe est appelée **gaussienne**, et ces fonctions modélisent alors certaines répartitions aléatoires.