Limites de fonctions

1 Limite en $\pm\infty$

1.1 Limite infinie à l'infini

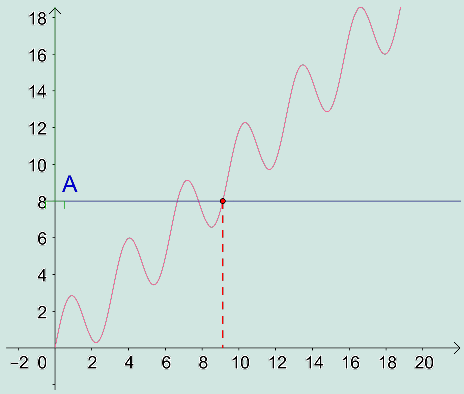
Définition 1

f est une fonction définie sur un intervalle du type $]a\,;+\infty[$.

- **f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$** si les images $f(x)$ deviennent plus grandes que n'importe quel nombre réel à condition que x soit assez grand.

  Ainsi, cela signifie que pour tout nombre réel $A > 0$, il existe un nombre réel $M > 0$, tel que si $x \geqslant M$, alors $f(x) \geqslant A$.

  On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.



- **f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$** si les images $f(x)$ deviennent plus petites que n'importe quel nombre réel à condition que x soit assez grand.

  Cela signifie que pour tout nombre réel $M < 0$, il existe un nombre réel $A > 0$, tel que pour tout $x \geqslant A$, $f(x) \leqslant M$.

  On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Définition 2

Si f est une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty\,;a[$, on définit **la limite $-\infty$ et $+\infty$ de f en $-\infty$** de manière analogue et on note alors :
(pour tout $A < 0$ (resp. $A > 0$), il existe $A < 0$, pour tout $x \leqslant A$ (resp. $x \geqslant A$), $f(x) \leqslant A$ (resp. $f(x) \geqslant A$)).

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

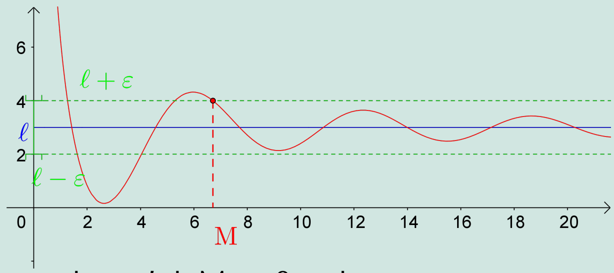
Propriété 1 : Limites de référence

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
- Pour tout entier naturel p, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^p = +\infty$
- Pour tout entier naturel p, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^p = \begin{cases} +\infty \text{ si } p \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } p \text{ est impair} \end{cases}$

1.2 Limite finie à l'infini

Définition 3

f est une fonction définie sur un intervalle du type $]a\,;+\infty[$.
f a pour limite un nombre réel ℓ quand x tend vers $+\infty$ si les images $f(x)$ deviennent aussi proches que l'on veut de ℓ à condition de prendre x suffisamment grand.



Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\mathrm{M} > 0$, tel que pour tout $x \geqslant \mathrm{M}$, $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$. On note alors : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

Définition 4

f est une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty\,;a[$.
f a pour limite un nombre réel ℓ quand x tend vers $-\infty$ si les images $f(x)$ deviennent aussi proches que l'on veut de ℓ à condition de prendre x suffisamment petit.
Cela signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\mathrm{M} < 0$,
tel que pour tout $x \leqslant \mathrm{M}$, $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \varepsilon$. On note alors : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell$.

Définition 5

On considère f une fonction tendant vers un nombre réel ℓ quand x tend vers $\pm\infty$.
La droite d'équation $y = \ell$ est alors **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f en $\pm\infty$.

Exemple 1

Dans la représentation graphique de la limite finie en $+\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.
La droite d'équation $y = 3$ est alors asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$: cela signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ se rapproche aussi près que l'on veut de la droite d'équation $y = 3$.

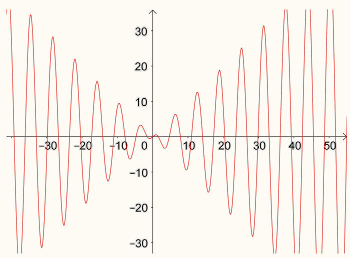
Propriété 2

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$ à la courbe représentative de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$ à la courbe représentative de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

1.3 Non-existence de limite en $\pm\infty$

Exemple 2

Certaines fonctions n'admettent pas limite en $+\infty$ ou en $-\infty$.
Par exemple, la fonction représentée ci-contre (d'expression $x \mapsto x\cos(x)$) n'admet de limite ni en $-\infty$ ni en $+\infty$



Propriété 3

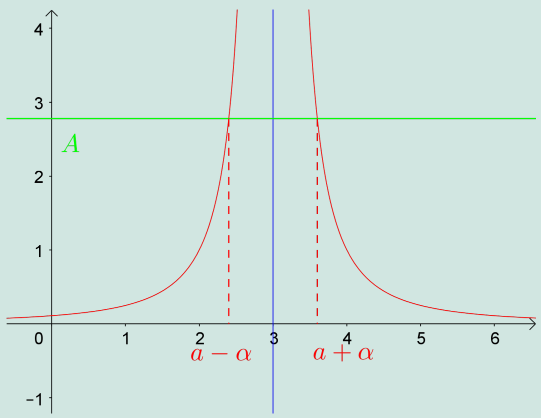
Les fonctions cosinus et sinus n'ont pas de limite en $-\infty$ ni en $+\infty$.

2 Limite en un point fini

Définition 6

On considère une fonction f définie un ensemble du type $]a-h\,;a[\cup]a\,;a+h[$.
f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a si les images $f(x)$ sont aussi grandes que l'on veut à condition de prendre x suffisamment proche de a.

Cela signifie que pour tout $\mathrm{M}>0$, il existe $\alpha>0$ tel que
pour tout x tel que $a-\alpha \leqslant x \leqslant a+\alpha$, $f(x)\geqslant \mathrm{M}$.
On note alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.

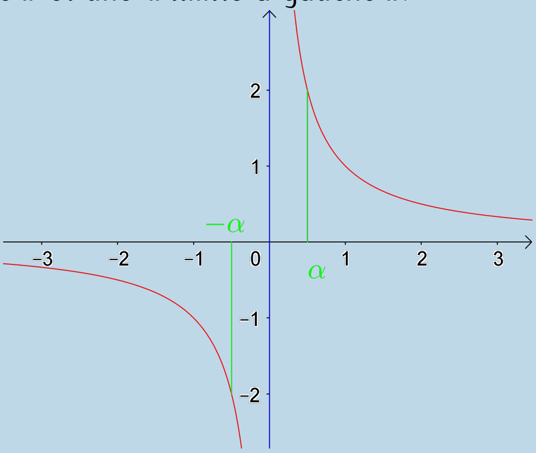


Remarque : On définit de manière analogue $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.
Cela signifie que pour tout $\mathrm{M}<0$, il existe $\alpha>0$ tel que pour tout x tel que $a-\alpha\leqslant x\leqslant a+\alpha$, $f(x)\leqslant \mathrm{M}$.

Propriété 4

On doit parfois distinguer « une limite à droite » et une « limite à gauche ».

- Si x tend vers 0 avec $x<0$,
  $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x}=-\infty$
- Si x tend vers 0 avec $x>0$,
  $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}=+\infty$



La fonction inverse admettant des limites distinctes « à gauche » et « à droite », elle n'a pas de limite en 0.

Définition 7

On considère f une fonction ayant pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ en a (éventuellement « à droite » ou « à gauche » de a).
La droite d'équation $x=a$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f.

Exemple 3

- Dans la représentation graphique de la limite infinie en un nombre fini, on a : $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=+\infty$.
  La droite d'équation $x=3$ est alors asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$ en 3 : cela signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ se rapproche aussi près que l'on veut de la droite d'équation $x=3$.
- La droite d'équation $x=0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction inverse.

3 Lien avec la dérivation

Définition 8

On considère f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $a \in$ I.

f **est dérivable en** a si le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0.

On définit alors le nombre dérivé en a par :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

4 Opération de limites

Propriété 5

ℓ et ℓ' sont deux nombres réels et f et g deux fonctions.

On donne les règles suivantes pour déduire certaines limites :

$\lim f$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$\ell+\ell'$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

$\lim f$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim g$	ℓ'	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim f \times g$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$-\infty$ (resp. $+\infty$)	F.I.

$\lim f$	$\ell \neq 0$	0 avec $f(x) > 0$	0 avec $f(x) < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

F.I. signifie « Forme Indéterminée », *i.e.* que la forme actuelle sous laquelle se présente la fonction ne permet pas de conclure sur sa limite : il faut donc la transformer (développer, factoriser, etc.) pour la trouver.

On trouve deux F.I. : « $+\infty - \infty$ » et « $\frac{0}{0} = 0 \times \infty = \frac{\infty}{\infty}$ ».

5 Comparaison de limites

Propriété 6 : Comparaison de limites infinies

f et g sont deux fonctions telles que

$$\begin{cases} \text{pour } x \text{ assez grand, } f(x) \leqslant g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Exemple 4

f est définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - \cos x$.

On sait que : $\begin{cases} \forall x \in [0;+\infty[, x^2-1 \leqslant x^2-\cos(x) \text{ car } \cos x \leqslant 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1 = +\infty \end{cases}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-\cos(x) = +\infty$.

Propriété 7 : Comparaison de limites infinies

On considère f et g deux fonctions telles que $\begin{cases} \text{pour } x \text{ assez grand, } f(x) \geqslant g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.

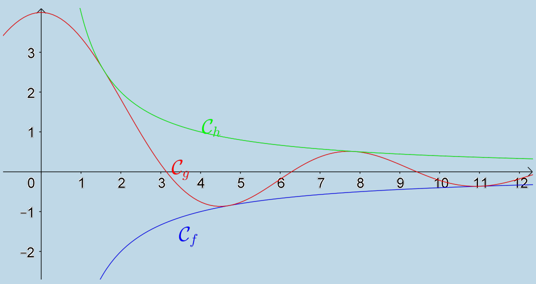
Remarque : Ces deux propriétés s'étendent au cas où on s'intéresse aux limites infinies en $-\infty$ et en un point, à condition de changer « x assez grand » en un ensemble convenable.

Propriété 8 : Propriété des gendarmes

On considère f, g et h trois fonctions telles que

$$\begin{cases} \text{pour } x \text{ assez grand, } f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \ell \end{cases}$$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$.



Remarque : Cette propriété s'étend au cas où on s'intéresse aux limites finies en $-\infty$ et en un point, à condition de changer « x assez grand » en un ensemble convenable.

Exemple 5

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Pour tout x, on a $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, et donc pour $x > 0$: $\dfrac{-1}{x} \leqslant \dfrac{\sin(x)}{x} \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on en déduit par la propriété des gendarmes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$.