# Raisonnement par récurrence

## 1 Principe de récurrence

### Définition 1

C'est un principe utilisé pour démonter qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel $n$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$, $n_0$ étant un entier naturel donné.
On procède en trois étapes :

- **Initialisation :**
  On montre que la propriété est vraie au « premier » rang $n_0$.
  Monter que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- **Hérédité :**
  On suppose la propriété acquise pour un entier naturel $n$ : c'est l'hypothèse de récurrence. On montre alors que la propriété au rang $n+1$.
  Montrer que $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
- **Conclusion :**
  La propriété est vraie pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$.
  Ainsi, $\forall n \geqslant n_0, \mathcal{P}(n)$.

### Exemple 1

1. $(u_n)_n$ est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + 1$.
2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a $2^n \geqslant 4n$.
3. Montrer que la suite $(i_n)_n$ définie par $\begin{cases} i_0 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2} \\ i_{n+1} = i_n^2 - 3 \end{cases}$ est constante.
4. $(v_n)_n$ est la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 8 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}v_n + 3 \end{cases}$.
   Montrer que la suite $(v_n)_n$ est strictement décroissante.
5. On définit la suite $(w_n)_n$ par $\begin{cases} w_0 = \frac{1}{7} \\ w_{n+1} = \dfrac{3}{4}w_n + \dfrac{1}{2} \end{cases}$.
   Montrer que la suite $(w_n)_n$ est strictement bornée par 0 et 2.
6. Montrer que si pour un entier $n \in \mathbb{N}$, si $n \geqslant 2n$, alors $n+1 \geqslant 2(n+1)$.
   Cette propriété est-elle vraie ?
7. Monter que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

### Propriété 1 : inégalité de Bernoulli

$a$ est un nombre réel strictement positif. Montrer par récurrence que pour tout $n > 0$, $(1+a)^n \geqslant 1 + na$.

# 2 Suites de référence

## 2.1 Suites arithmétiques

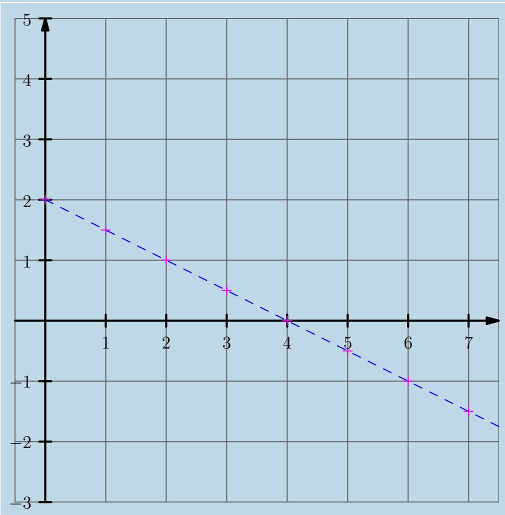
**Définition 2**

Une suite $(a_n)$ est **arithmétique** s'il existe un nombre réel $r$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = a_n + r$.
On dit alors que $r$ est la **raison** de la suite $(a_n)$.

**Propriété 2**

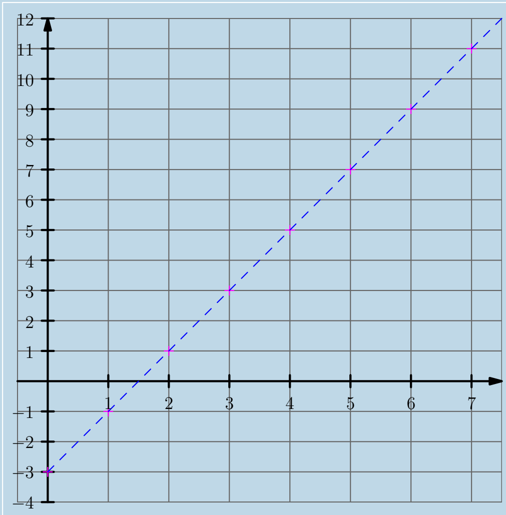
Pour une suite $(a_n)$ de raison $r$ et de premier terme $a_0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a_0 + rn$.
Une suite arithmétique est représentée par des points alignés.

Si la raison $r$ est strictement négative, la suite est strictement décroissante.




La suite prend alors pour $n$ assez grand des valeurs négatives arbitrairement basses : on dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = -\infty$.

Si la raison $r$ est strictement positive, la suite est strictement croissante.




La suite prend alors pour $n$ assez grand des valeurs arbitrairement grandes : on dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

**Exemple 2**

On a représenté les suites $(a_n)$ et $(\alpha_n)$, définies par $\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = a_n - 0,5 \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha_0 = -3 \\ \alpha_{n+1} = \alpha_n + 2 \end{cases}$.

1. Déterminer $n$ tel que $a_n \leqslant -100$.
2. Déterminer $n$ tel que $\alpha_n \geqslant 1\ 000$.

## 2.2 Suites géométriques

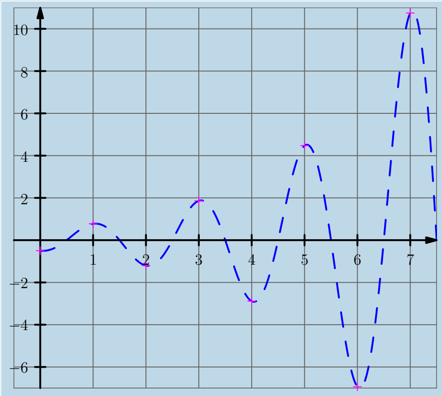
**Définition 3**

Une suite $(g_n)$ est **géométrique** s'il existe un nombre réel $q$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $g_{n+1} = q \times g_n$.
On dit alors que $q$ est la **raison** de la suite $(g_n)$.

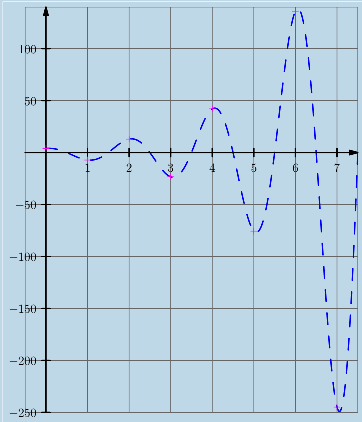
## ♯ Propriété 3

Pour une suite $(g_n)$ de raison $q$ et de premier terme $g_0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = g_0 \times q^n$.

- $q < -1$



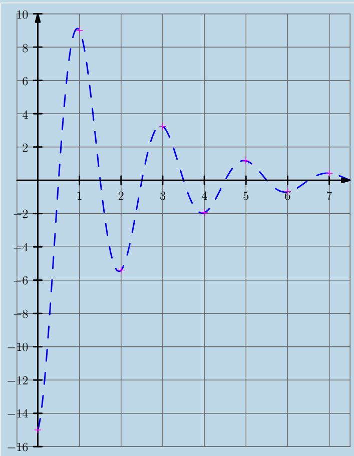

$g_0 < 0$



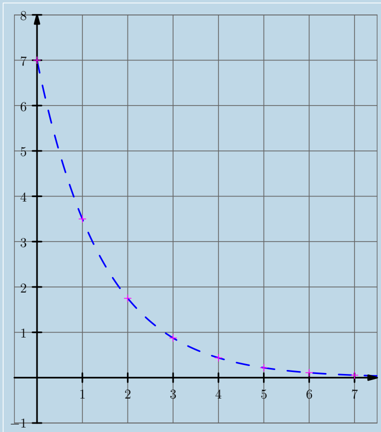

$g_0 > 0$

La suite prend alors alternativement des valeurs arbitrairement négatives et positives : on dit qu'elle diverge sans limite.

- $-1 < q < 0$

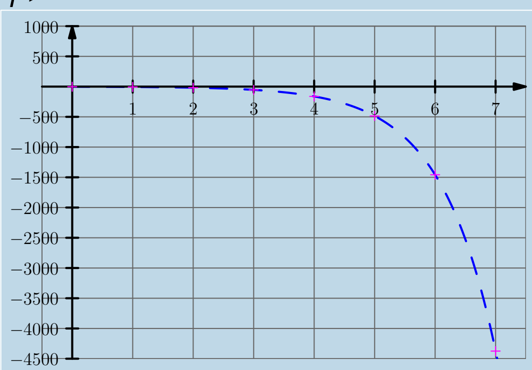



- $0 < q < 1$



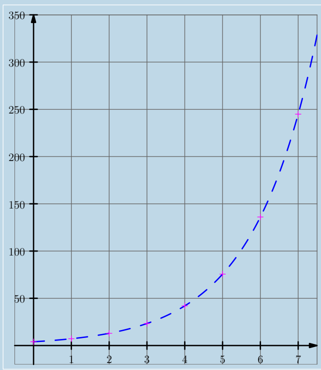

La suite prend alors des valeurs de plus en plus proches de 0 : on dit qu'elle converge vers 0 et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = 0$.

- $q > 1$




$g_0 < 0$

La suite prend alors pour $n$ assez grand des valeurs négatives arbitrairement basses : on dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = -\infty$.




$g_0 > 0$

La suite prend alors pour $n$ assez grand des valeurs arbitrairement grandes : on dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} g_n = +\infty$.

### ↪ Exemple 3

1. Pour la suite géométrique de raison $0,3$ et de premier terme 3, déterminer $n$ tel que $g_n \leqslant 0,001$.
2. Une population de bactéries de 1 000 individus augmente de 45 % chaque heure : au bout de combien d'heures la population aura triplé ?

### ♯ Propriété 4

Pour une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $g_0$.

| | $q<0$ | $0<q<1$ | $q>1$ |
|---|---|---|---|
| $g_0<0$ | $(g_n)$ non monotone | $(g_n)$ croissante | $(g_n)$ décroissante |
| $g_0>0$ | $(g_n)$ non monotone | $(g_n)$ décroissante | $(g_n)$ croissante |

N.B. : Si $g_0=0$ ou si $q=1$, la suite est constante ; si $q=-1$, la suite prend deux valeurs : $\pm g_0$.

## 2.3 Sommes partielles

### ♯ Propriété 5

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Pour une suite arithmétique $(a_n)$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0+\cdots+a_n = \frac{(a_0+a_n)(n+1)}{2}$$

N.B. : On peut retenir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{(\text{premier terme} + \text{dernier terme}) \times \ \text{nombre de termes}}{2}$.

### ♯ Propriété 6

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k = 1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
- Pour une suite géométrique $(g_n)$ de raison $q\neq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} g_k = g_0+\cdots+g_n = g_0\frac{1-q^n}{1-q}$$

N.B. : On peut retenir $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} g_k = \frac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$.

N.B. 2 : Si $q=1$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} g_k = g_0\times(n+1)$.

## 3 Suites bornées

**Définition 4**

- Une suite $(u_n)$ est **majorée** par un nombre réel M si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \mathrm{M}$.
- Une suite $(u_n)$ est **minorée** par un nombre réel $m$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n$.
- Une suite $(u_n)$ est **bornée** si elle est majorée et minorée.

**Propriété 7**

Toute suite convergente est bornée.

**N.B.** : La réciproque de cette propriété est fausse : une suite peut être bornée sans être convergente, comme par exemple la suite de terme général $(-1)^n$.

**Propriété 8**

$(u_n)$ est une suite croissante qui converge vers un nombre réel $\ell$.
Alors, pour tout entier naturel $n$, $u_n \leqslant \ell$.

**Propriété 9 : Convergence monotone**

On considère $(u_n)$ une suite croissante.

- Si la suite $(u_n)$ est majorée, alors elle converge.
- Si la suite $(u_n)$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.