Nombres complexes

1 Module, arguments

1.1 Module

Définition 1

On considère un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
Le module du nombre z est le nombre réel positif noté $|z|$ et défini par $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

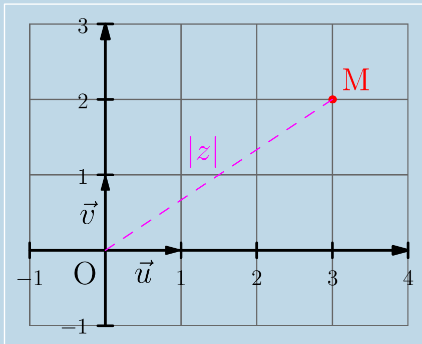
Propriété 1

Le module est le prolongement sur $\mathbb{C}$ de la fonction valeur absolue,
i.e. si x est un nombre réel, le module de x est égal à la valeur absolue de x (ces deux fonctions coïncident sur $\mathbb{R}$).

Propriété 2

On considère un nombre complexe z et M le point d'affixe z. Alors

$$|z| = \mathrm{OM}$$



Propriété 3

Pour tout nombre complexe z, $|z|^2 = z\overline{z}$.

Propriété 4

Pour tout nombre complexe z,

- $|-z| = |z|$;
- $|\overline{z}| = |z|$.

Propriété 5

Pour tous nombres complexes z et z',

- $|zz'| = |z||z'|$;
- $|z^n| = |z|^n$ où n est un entier naturel ;
- $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$ où $z \neq 0$.

Propriété 6 : Inégalité triangulaire

Pour tous nombres complexes z et z', $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Propriété 7

On considère ω un nombre complexe et ρ un nombre réel positif. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - \omega| = \rho$ est le cercle de centre le point d'affixe ω et de rayon ρ.

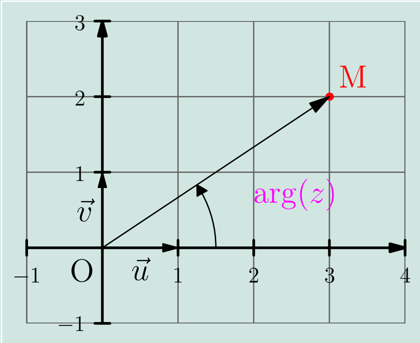
Exemple 1

L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z - 1 + \mathrm{i}| = 3$ est le cercle de centre le point Ω d'affixe $1 - \mathrm{i}$ et de rayon 3.

1.2 Arguments

Définition 2

On considère un nombre complexe non nul z et M le point d'affixe z. On note U le point d'affixe 1.
Un argument du nombre z, noté $\arg(z)$, est une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OU}\,;\overrightarrow{OM}\right)$



N.B. : On ne définit pas d'argument pour 0.

Propriété 8

Un nombre complexe non nul z admet une infinité d'arguments.
Si θ est un argument de z, alors les autres sont de la forme $\theta + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
On note $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$ (« un argument de z est congru à theta modulo deux pi »).

N.B. : On veillera à parler d'un argument de z et non de l'argument de z.

Propriété 9

Pour tout nombre complexe non nul z,

- $\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$ (symétrie par rapport au point O, origine du repère) ;
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$ (symétrie par rapport à l'axe des nombres réels).

Propriété 10

Pour tous nombres complexes non nuls z et z',

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$;
- $\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$ où n est un entier naturel ;
- $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$;

Propriété 11

z est un nombre complexe non nul.

- z est un nombre réel si et seulement si $\arg(z) \equiv 0\ [\pi]$ si et seulement si $(\arg(z) \equiv 0\ [2\pi]$ ou $\arg(z) \equiv \pi\ [2\pi])$;
- z est un nombre imaginaire pur si et seulement si $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ si et seulement si $\left(\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \text{ ou } \arg(z) \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]\right)$.

Propriété 12

On considère a et b deux nombres complexes, et A et B leur point image.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que $\arg\left(\dfrac{z-b}{z-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$ est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B.

1.3 Forme trigonométrique

Définition 3

On considère un nombre complexe non nul z dont le module est $|z|$ et un argument est θ. Alors

$$z = |z|\big(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)\big)$$

On dit que le nombre z est présenté sous **forme trigonométrique**.

Propriété 13

Deux nombres complexes non nuls sont égaux s'ils ont le même module et que leur argument est le même à un multiple entier de 2π.

Propriété 14

On considère un nombre complexe z non nul avec $z = x + \mathrm{i}y$ pour sa forme algébrique et $z = |z|\,(\cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta))$ une forme trigonométrique. Alors :

- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$;
- $x = \Re(z) = |z|\cos(\theta)$;
- $y = \Im(z) = |z|\sin(\theta)$.

N.B. : Pour un nombre complexe non nul $z \neq 0$ dont on connaît ses parties réelle $\Re(z)$ et imaginaire $\Im(z)$, on peut déterminer le module $|z|$ puis on peut déterminer un argument θ via son cosinus et son sinus par les relations :

- $\cos(\theta) = \dfrac{\Re(z)}{|z|}$;
- $\sin(\theta) = \dfrac{\Im(z)}{|z|}$.

Exemple 2

Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique.

- $z_1 = 1 + \mathrm{i}$.
- $z_2 = 7 - 14\mathrm{i}\sqrt{3}$.

1.4 Distance & angle sur le plan complexe

Propriété 15

On considère quatre points du plan A ; B ; C et D d'affixe respective a ; b ; c et d. U est le point d'affixe 1.

- $AB = |b - a|$;
- $\left(\overrightarrow{OU}\,;\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(b - a)\ [2\pi]$ en supposant $a \neq b$;
- $\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right) \equiv \arg\left(\dfrac{d - c}{b - a}\right)\ [2\pi]$ en supposant $a \neq b$ et $c \neq d$.

Exemple 3

- Étudier la nature du triangle ABC, avec $A(4 + 8\mathrm{i})$, $B(-1 + 2\mathrm{i})$ et $C(10 + 13\mathrm{i})$.
- Étudier le parallélisme des droites (DE) et (FG) où $D(-2 + 20\mathrm{i})$, $E(6 + 17\mathrm{i})$, $F(-10 + 10\mathrm{i})$ et $G(22 + 2\mathrm{i})$.

2 Notation exponentielle

Définition 4

Pour tout nombre réel θ, on note

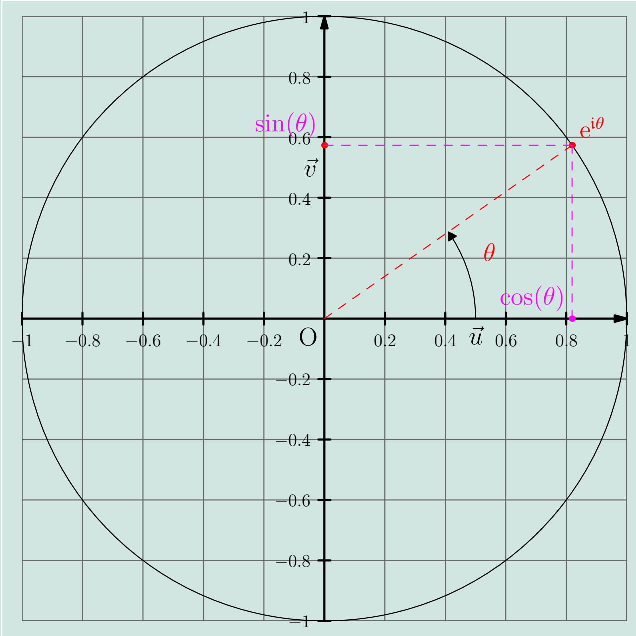
$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe de module 1 et dont un argument est θ.

La fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \end{array}$$

a pour courbe représentative le cercle trigonométrique.



Propriété 16

On considère un nombre complexe non nul z dont un argument est θ.

$$z = |z|e^{i\theta}$$

est **la forme exponentielle du nombre** z.

Propriété 17

Pour tous nombres réels θ et θ', on a

- $\left|e^{i\theta}\right| = 1$;
- $\arg(e^{i\theta}) \equiv \theta\ [2\pi]$;
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$;
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$;
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$;
- $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ si et seulement $\theta \equiv \theta'\ [2\pi]$.

Exemple 4

Écire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants.

$z_1 = (1+i)^3$ $\qquad$ $z_2 = \dfrac{1 - i\sqrt{3}}{2i}$ $\qquad$ $z_3 = -5\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\right)$

Exemple 5

Retrouver les formules d'addition et de duplication des fonctions cos et sin.