Géométrie plane & nombres complexes

1 Notion de nombre complexe

♯ Propriété 1

Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** possédant les propriétés suivantes :

- l'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$;
- l'addition et la multiplication des nombres réels se « prolongent » aux nombres complexes et les règles de calcul restent les mêmes ;
- il existe un nombre complexe, appelé **unité imaginaire**, noté i, tel que $\mathrm{i}^2 = -1$;
- tout nombre complexe z s'écrit de manière unique :

$$z = x + \mathrm{i}\,y \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}$$

Définition 1

On considère un nombre complexe z.
z peut s'écrire sous la forme $z = x + \mathrm{i}\,y$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
On dit alors que le nombre z est présenté sous **sa forme algébrique**.

- x est **la partie réelle du nombre** z et on note $\mathfrak{Re}(z) = x$;
- y est **la partie imaginaire du nombre** z et on note $\mathfrak{Im}(z) = y$.

Remarque : Il est important de remarquer que $\mathfrak{Re}(z) \in \mathbb{R}$ et que $\mathfrak{Im}(z) \in \mathbb{R}$.
Le nombre complexe $z = 2 + (-\mathrm{i}+2)\mathrm{i}$ n'est pas présenté sous forme algébrique car $-\mathrm{i}+2 \notin \mathbb{R}$.
Cependant, $z = 2 - \mathrm{i}^2 + 2\mathrm{i} = 2 - (-1) + 2\mathrm{i} = 3 + 2\mathrm{i}$, et on déduit que $\begin{cases} \mathfrak{Re}(z) = 3 \\ \mathfrak{Im}(z) = 2 \end{cases}$ car $3 \in \mathbb{R}$ et $2 \in \mathbb{R}$.

Remarque : En physique-chimie, où les nombres complexes sont régulièrement utilisés, on préfère noter j l'unité imaginaire (pour éviter la confusion avec, par exemple, l'intensité du courant i). Il est aussi habituel, notamment en électronique, de souligner les nombres complexes : on noterait $\underline{Z}$.
À noter qu'en mathématiques, j est souvent utiliser pour noter le nombre complexe $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Définition 2

On considère un nombre complexe z.

- si $\mathfrak{Im}(z) = 0$, z est un nombre réel ;
- si $\mathfrak{Re}(z) = 0$, z est un **nombre imaginaire pur**.

♯ Propriété 2

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si leur partie réelle sont égales et leur partie imaginaire sont égales.

♯ Propriété 3 : Une identité remarquable

Pour tous nombres réels a et b, on a $(a + \mathrm{i}\,b)(a - \mathrm{i}\,b) = a^2 + b^2$.

↪ Exemple 1

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique

$z_1 = (1 + 3\mathrm{i})(5 - \mathrm{i})$ $\quad z_2 = (2 + \mathrm{i})^2$ $\quad z_3 = \frac{1}{3-2\mathrm{i}}$ $\quad z_4 = \frac{1+3\mathrm{i}}{4+2\mathrm{i}}$

i^n (distinguer les cas où $n = 4k$; $n = 4k+1$; $n = 4k+2$; $n = 4k+3$) puis $\mathrm{j}^n = \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

2 Équations du deuxième degré

Définition 3

Pour un nombre réel a, les solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^2 = a$ sont **les racines carrées de** a **dans** $\mathbb{C}$.

Propriété 4

Tout nombre réel a non nul possède deux racines carrées distinctes dans $\mathbb{C}$:

- si $a > 0$, ses racines carrées sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$;
- si $a < 0$, ses racines carrées sont $\mathrm{i}\sqrt{-a}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{-a}$.

Théorème 1 : Théorème fondamental de l'algèbre

Toute équation à coefficients réels du deuxième degré possède deux solutions complexes (éventuellement confondues). Ainsi, pour trois nombres réels a ; b et c, avec $a \neq 0$, on s'intéresse à l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$

$$az^2 + bz + c = 0.$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le **discriminant** associé à cette équation.

- si $\Delta > 0$, cette équation possède deux solutions réelles distinctes
  $z_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- si $\Delta = 0$, cette équation possède une unique solution réelle (« double »)
  $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$;
- si $\Delta < 0$, cette équation possède deux solutions complexes non réelles distinctes
  $z_1 = \dfrac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

En outre,

- si $\Delta \neq 0$, alors on a la factorisation $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$;
- si $\Delta = 0$, alors on a la factorisation $az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2$.

Exemple 2

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z suivantes.

$2z^2 + 3z - 5 = 0$	$5z^2 + 2 = 0$	$\frac{z^2+2z+5}{2z^2+1} = 1$
$z^2 - 4z + 4 = 0$	$z^2 - (1+\sqrt{3})z + \sqrt{3} = 0$	$\frac{z-2}{z-1} = z$
$\frac{z^2}{3} + \frac{z}{6} + 1 = 0$	$z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 6z + 8 = 0$	$\frac{1}{z^2} = -1$

On pourra, après l'avoir justifiée, utiliser l'égalité $z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 6z + 8 = (z^2+2)(z^2+3z+4)$.

Propriété 5

On considère deux nombres réels z_1 et z_2 dont on connaît la somme S et le produit P.
Alors z_1 et z_2 sont solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $z^2 - \mathrm{S}z + \mathrm{P} = 0$.

Exemple 3

Résoudre les systèmes suivants d'inconnues $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} z_1 z_2 = 5 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 z_2 = 4 \\ z_1 + z_2 = 6 \end{cases}$$

3 Représentation géométrique

Définition 4

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. On pose les conventions suivantes :

- à tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$ (où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$), on associe le point M du plan de coordonnées $(x\,;y)$. M est alors le point image du nombre z ;
- tout point M du plan de coordonnées $(x\,;y)$ est le point image de l'unique nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$. Le nombre z est alors **l'affixe** du point M ; on note dans ce cas M(z).
- $*$ L'axe des abscisses est appelé **axe des nombres réels**.

  $*$ L'axe des ordonnées est appelé **axe des nombres imaginaires purs**.

Remarque : *A contrario* des nombres réels, représentés par une droite graduée, où un « ordre naturel » apparaît, les nombres complexes étant représentés sur un plan, on prendra garde à ne pas écrire d'inégalité avec des nombres complexes non réels.

Propriété 6

Pour deux points A et B du plan d'affixes respectives z_A et z_B,
l'affixe du point I, milieu du segment [AB] est $\dfrac{z_A + z_B}{2}$.

Définition 5

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$. On pose les conventions suivantes :

- à tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$ (où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$), on associe le point M d'affixe z puis le vecteur $\overrightarrow{OM}$. Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est alors le vecteur image de z, de même que tout représentant du vecteur $\overrightarrow{OM}$;
- à tout vecteur $\vec{a}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on associe le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$. Le vecteur $\vec{a}$ a alors pour **affixe** z.

Propriété 7

Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ont pour affixes respectives $z_{\vec{a}}$ et $z_{\vec{b}}$.

- les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont égaux si et seulement si leurs affixes sont égales ;
- le vecteur $\vec{a} + \vec{b}$ a pour affixe $z_{\vec{a}} + z_{\vec{b}}$;
- pour un nombre réel k, le vecteur $k \cdot \vec{a}$ a pour affixe $k \times z_{\vec{a}}$;
- si A et B sont deux points du plan d'affixe respectives z_A et z_B,
  l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.
- Les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires
  si et seulement s'il existe un nombre réel k tel que $k \times z_{\vec{a}} = z_{\vec{b}}$.

Exemple 4

Dans le plan complexe les points A, B et C sont d'affixe respective :

$z_A = 1 + \frac{1}{2}\mathrm{i}$ $\qquad$ $z_B = \frac{3}{2} + 2\mathrm{i}$ $\qquad$ $z_C = -1 - \frac{11}{2}\mathrm{i}$

Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

4 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 6

On considère le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
Le conjugué du nombre complexe z est le nombre complexe

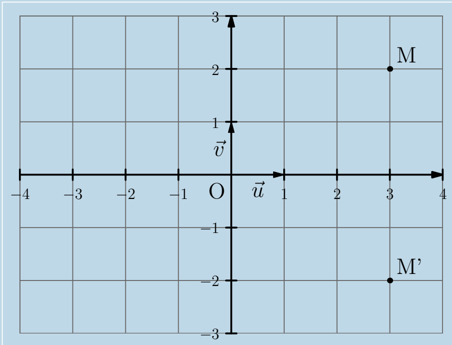
$$\overline{z} = x - \mathrm{i}\,y.$$

Exemple 5

$\overline{-4+2\mathrm{i}} = -4-2\mathrm{i}$ et $\overline{2\mathrm{i}} = -2\mathrm{i}$.

Propriété 8

On considère un nombre complexe z.
Les points M, d'affixe z, et M′, d'affixe $\overline{z}$, sont symétriques par rapport à l'axe des nombres réels.



Propriété 9

Pour tout nombres complexe z, on a

- $\overline{\overline{z}} = z$ (idempotence) ;
- $z + \overline{z} = 2\mathfrak{Re}(z)$ et ainsi,
  z est un nombre imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$;
- $z - \overline{z} = 2\mathrm{i}\,\mathfrak{Im}(z)$ et ainsi,
  z est un nombre réel si et seulement si $z = \overline{z}$.

Propriété 10

Pour tous nombres complexes z et z', on a

- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$;
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$;
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ avec n entier naturel ;
- $\overline{\left(\dfrac{z'}{z}\right)} = \dfrac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

Exemple 6

Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants.

$z_1 = (2+\mathrm{i})(6-3\mathrm{i})$ $\qquad$ $z_2 = \frac{\mathrm{i}(2-2\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})^2}$

Exemple 7

Exemple : Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $5\overline{z} = 4 - \mathrm{i}$.