INTÉGRATION

1 Aires & fonctions

Définition 1

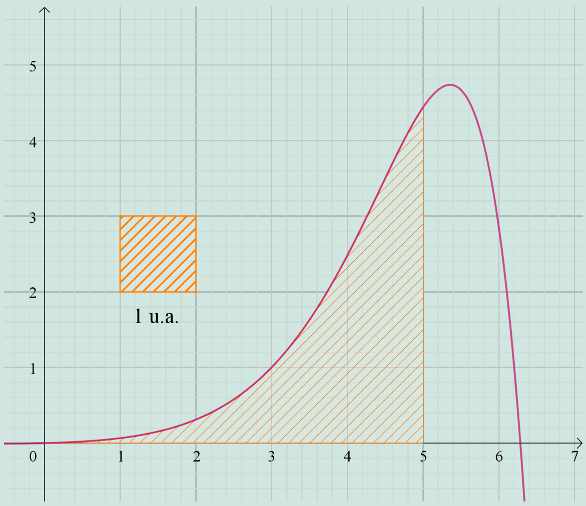
On se place dans un repère orthonormal (O, I ; J).
Une unité d'aire (u.a.) est l'aire du rectangle de côtés [OI] et [OJ].

Définition 2

On considère une fonction f définie, continue et positive sur un intervalle I. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

Pour a et b deux nombres réels de l'intervalle I tels que $a < b$, **l'intégrale de a à b de la fonction f** est l'aire comprise d'une part entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses et d'autre part entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

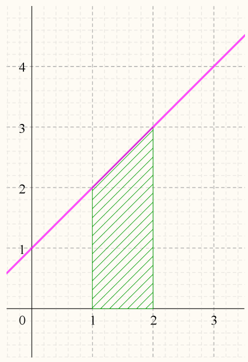
On note cette aire $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
(« intégrale de a à b de $f(x)$, dx »).



N.B. : On peut noter indifféremment $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. L'élément infinitésimal « dx » (ou « dt ») symbolise le passage d'une courbe qui est un objet dont on peut mesurer la longueur à l'intégrale qui est une aire.

Exemple 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 1$.
Calculer .
Le calcul de $\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ se ramène au calcule de l'aire de deux carrés et d'un triangle isocèle rectangle d'où :
$\displaystyle\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1^2 + 1^2 + \frac{1\times 1}{2} = \frac{5}{2}.$



2 Primitives

Définition 3

On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle I.
Une primitive de la fonction f est une fonction F définie et dérivable sur I telle que la dérivée de F est f : $\mathrm{F}' = f$.

Exemple 2

Une primitive de la fonction $x \mapsto 2x$ est la fonction $x \mapsto x^2$.
Les fonctions $x \mapsto x^2 + 6$; $x \mapsto x^2 - 4$; $x \mapsto x^2 + \sqrt{3}$ et $x \mapsto x^2 - \mathrm{e}^2$ sont des primitives de $x \mapsto 2x$.

N.B. : Si une fonction admet une primitive, elle en admet aussi une infinité.

Propriété 1

Toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.

Propriété 2

On considère f une fonction définie et continue sur un intervalle I.

• Si la fonction F est une primitive de la fonction f, alors pour tout nombre réel k, la fonction définie par $x \mapsto \mathrm{F}(x) + k$ est encore une primitive de f.

• Pour x_0 et y_0 deux nombres réels, il existe une unique primitive de la fonction f telle que $\mathrm{F}(x_0) = y_0$.

Propriété 3

Intervalle	Fonction f définie sur I par :	Une fonction primitive F :
$\mathrm{I} = \mathbb{R}$	$f(x) = a$	$\mathrm{F}(x) = ax$
$\mathrm{I} = \mathbb{R}$	$f(x) = x$	$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{2}x^2$
$\mathrm{I} = \mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{3}x^3$
$\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$ ($\mathbb{R}$ si $n \geqslant 1$)	$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$	$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\mathrm{I} =]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\mathrm{F}(x) = -\frac{1}{x}$
$\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathrm{F}(x) = 2\sqrt{x}$
$\mathrm{I} = \mathbb{R}$	$f(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^x$
$\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathrm{F}(x) = \ln(x)$
$\mathrm{I} = \mathbb{R}$	$f(x) = \cos(x)$	$\mathrm{F}(x) = \sin(x)$
$\mathrm{I} = \mathbb{R}$	$f(x) = \sin(x)$	$\mathrm{F}(x) = -\cos(x)$

Propriété 4

On considère f, g et u trois fonctions définies et continues sur un intervalle I et k un nombre réel.
On note F et G une primitive respective des fonctions f et g.

- Une primitive de la fonction $x \mapsto k \times f(x)$ est $x \mapsto k \times \mathrm{F}(x)$.
- Une primitive de la fonction $x \mapsto f(x) + g(x)$ est $x \mapsto \mathrm{F}(x) + \mathrm{G}(x)$.
- Une primitive de la fonction $x \mapsto u'(x) \times \big(u(x)\big)^n$ est $x \mapsto \frac{1}{n+1}\big(u(x)\big)^{n+1}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $n \neq -1$.
- Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ est $x \mapsto \ln(u(x))$ (dans le cas où u est strictement positive sur I).
- Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{u(x)}$ (dans le cas où u ne s'annule pas sur I).
- Une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ est $x \mapsto 2\sqrt{u(x)}$ (dans le cas où u est positive sur I).
- Une primitive de la fonction $x \mapsto u'(x) \times \mathrm{e}^{u(x)}$ est $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$.

N.B. : Toutes les fonctions ne possèdent pas (loin de là !) de primitive « explicite », *i.e.* une primitive qui s'exprime à l'aide des fonctions usuelles et des opérations classiques.
C'est le cas par exemple pour la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

3 Lien entre primitive et intégrale

Propriété 5

On considère une fonction f continue et positive sur un intervalle I, $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$.
La fonction F est une primitive de la fonction f sur I. Alors :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{F}(t)\right]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

Démonstration : dans le cas où f est une fonction positive et croissante sur un intervalle $[a\,;b]$.
N.B. : Ce calcul ne dépend pas du choix de la primitive F.

Théorème 1 : Théorème Fondamental de l'Analyse

On considère f une fonction continue et positive sur un intervalle I et a un nombre réel de l'intervalle I.
Alors la fonction définie par

$$\mathrm{F} : x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est la primitive de f sur I telle que $\mathrm{F}(a) = 0$.

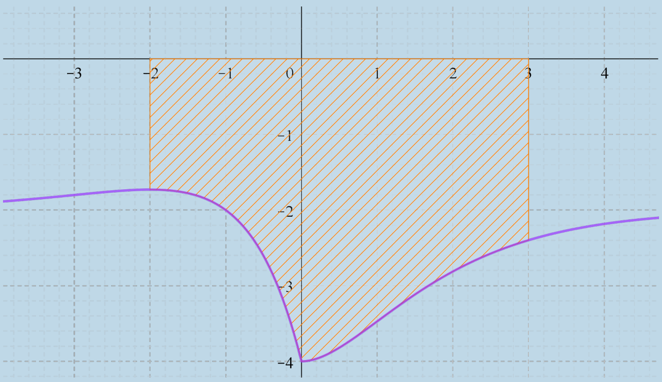
Définition 4 : extension de la définition d'intégrale à des fonctions non nécessairement positives

On considère f une fonction continue sur un intervalle I, F une primitive de f, $a \in \mathrm{I}$ et $b \in \mathrm{I}$.
L'intégrale de a à b de f est le nombre réel défini par :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{F}(t)\right]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a).$$

Propriété 6

On considère une fonction f négative sur un intervalle $[a\,;b]$.
L'aire comprise entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ vaut $-\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **l'aire algébrique** du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$ et l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.



4 Propriétés de l'intégrale

Propriété 7

On considère f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle I, k un nombre réel et a ; b et c trois nombres réels de l'intervalle I. Alors :

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$;
- $\displaystyle\int_a^b \big(k \times f(x)\big)\,\mathrm{d}x = k \times \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (Linéarité de l'intégrale)
- $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ (Linéarité de l'intégrale)
- $\displaystyle\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$ (Relation de CHASLES) ;
- $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (Anti-symétrie).

Propriété 8 : Positivité de l'intégrale

On considère f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux nombres réels de l'intervalle I. Alors :

- si $f(x) \geqslant 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$;
- si $f(x) \leqslant g(x)$, alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

Propriété 9

On considère f et g deux fonctions continues et positives sur un intervalle I.
On suppose que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, on a $f(x) \leqslant g(x)$.
L'aire, exprimé en unité d'aires, de la surface comprise entre $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

Définition 5

Pour une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\,;b]$, **la valeur moyenne de f sur** $[a\,;b]$ est $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 10

Pour une fonction f définie, positive et continue sur un intervalle $[a\,;b]$ de valeur moyenne μ sur $[a\,;b]$, l'aire comprise entre la courbe de f et l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$ est la même que celle d'un rectangle de dimensions μ et $b - a$.