Limites de suites

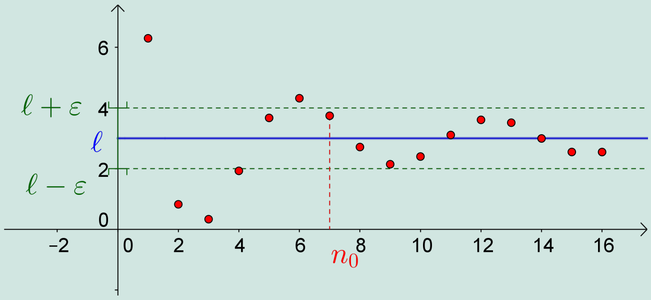
1 Les différentes limites d'une suite numérique

1.1 Convergence

Définition 1

Une suite $(u_n)_n$ converge vers un nombre réel ℓ si tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang.

Cela signifie que pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon$.
On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.



Propriété 1 : unicité de la limite

Si une suite $(u_n)_n$ converge vers un nombre réel ℓ, alors cette limite est unique.

Propriété 2 : limites de référence

- $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
- Pour tout entier naturel $p > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.
- Pour tout nombre réel q tel que $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.

Propriété 3 : cas des suites définies par récurrence

On considère une suite $(u_n)_n$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction définie et continue sur un intervalle I.
On suppose que cette suite converge vers un nombre réel ℓ.
Alors, le nombre ℓ est tel que $\ell = f(\ell)$.

Remarque : Pour que cette propriété s'applique, il faut que la fonction f soit continue en ℓ mais on n'insistera pas sur cette hypothèse cette année.
Remarque : La convergence ou non dépendra souvent du premier terme u_0. Il est à noter que les nombres ℓ tels que $\ell = f(\ell)$ ne sont que des candidats : la suite peut ne pas converger malgré leur existence.

Exemple 1

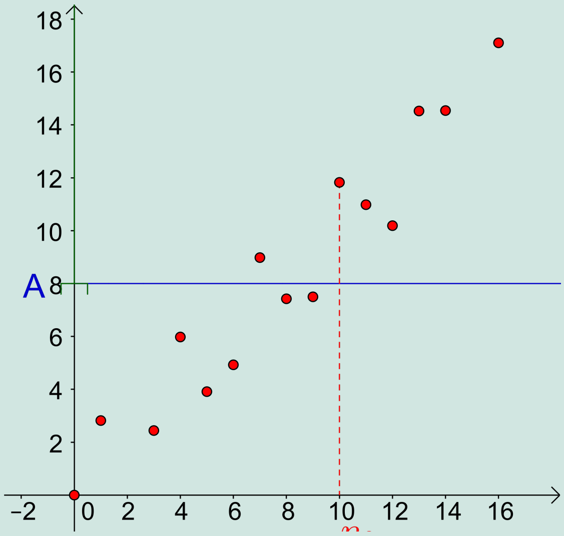
On pose $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 1{,}5u_n - 3 \end{cases}$. Si cette suite converge vers ℓ, alors $\ell = 1{,}5\ell - 3$ d'où $\ell = 6$.
On pourrait montrer ici que cette suite converge bien vers 6 ; néanmoins, la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 1{,}5v_n - 3 \end{cases}$, elle ne converge pas.

1.2 Divergence vers $\pm\infty$

Définition 2

Une suite $(u_n)_n$ diverge vers $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]\mathrm{A};+\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0.

Cela signifie que pour tout nombre réel $\mathrm{A} > 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant \mathrm{A}$.



On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Définition 3

Une suite $(u_n)_n$ diverge vers $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty;\mathrm{A}[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang n_0.

Cela signifie que pour tout nombre réel $\mathrm{A} < 0$, il existe un rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant \mathrm{A}$.

On note alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Propriété 4 : limites de référence

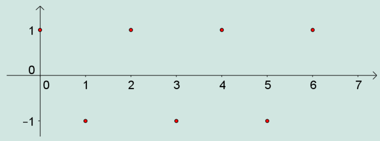
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
- Pour tout entier naturel $p > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
- Pour tout nombre réel $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

__Démonstration__ pour la suite de terme général q^n.

1.3 Divergence sans limite

Définition 4

Si une suite $(u_n)_n$ ne converge vers aucun réel et ne diverge ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$, on dit que **la suite** $(u_n)_n$ **diverge** sans limite.



Propriété 5 : limites de référence

- La suite de terme général $(-1)^n$ diverge.
- Pour tout nombre réel $q \leqslant -1$, la suite de terme général q^n diverge.
- La suite de terme général $\cos(n)$ diverge.
- La suite de terme général $\sin(n)$ diverge.

1.4 Bilan

Propriété 6

Le comportement en $+\infty$, *i.e.* la limite d'une suite correspond à un, et un seul de ces cas-là :

- la suite converge vers un nombre réel (et ce nombre est alors unique) ;
- la suite diverge vers $+\infty$;
- la suite diverge vers $-\infty$;
- la suite diverge sans limite.

2 Suites bornées

Définition 5

- Une suite $(u_n)_n$ est **majorée** par un nombre réel M si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \mathrm{M}$.
- Une suite $(u_n)_n$ est **minorée** par un nombre réel m si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m \leqslant u_n$.
- Une suite $(u_n)_n$ est **bornée** si elle est majorée et minorée.

Propriété 7

Toute suite convergente est bornée.

N.B. : La réciproque de cette propriété est fausse : une suite peut être bornée sans être convergente, comme par exemple la suite de terme général $(-1)^n$.

Propriété 8

$(u_n)_n$ est une suite croissante qui converge vers un nombre réel ℓ.
Alors, pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \ell$.

Démonstration $(*)$

Propriété 9 : convergence monotone

$(u_n)_n$ est une suite croissante.

- Si la suite $(u_n)_n$ est majorée, alors elle converge.
- Si la suite $(u_n)_n$ n'est pas majorée, alors elle diverge vers $+\infty$.

Démonstration $(*)$

3 Comparaison de limites

Propriété 10 : comparaison de limites infinies

On considère (u_n) et (v_n) deux suites telles que :

- $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang n_0
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration

Propriété 11 : comparaison de limites finies : « Propriété des gendarmes »

On considère (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que :

- $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang n_0
- les suites (u_n) et (w_n) convergent vers le même nombre réel ℓ

Alors la suite (v_n) converge vers ℓ.

N.B. : on peut « passer à la limite » pour une inégalité : ainsi, si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leqslant b_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
Néanmoins, les inégalités strictes ne sont pas conservées : si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

4 Opérations et limites

Propriété 12

On considère ℓ et ℓ' deux nombres réels et (u_n) et (v_n) deux suites.
On donne les règles suivantes pour déduire certaines limites :

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell+\ell'$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$ (resp. $-\infty$)	$-\infty$ (resp. $+\infty$)	F.I.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\ell \neq 0$	« 0^+ » : 0 avec $u_n > 0$ à partir d'un certain rang	« 0^- » : 0 avec $u_n < 0$ à partir d'un certain rang	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

F.I. signifie « Forme Indéterminée », *i.e.* que la forme actuelle sous laquelle se présente la suite ne permet pas de conclure sur sa limite : il faut donc transformer l'expression (développer, factoriser, etc.) pour trouver sa limite.
On trouve deux F.I. : « $+\infty - \infty$ » et « $\frac{0}{0} = 0 \times \infty = \frac{\infty}{\infty}$ ».