Matrices

1 Notion de matrice

Définition 1

Une **matrice** est un tableau de nombres réels à n lignes et p colonnes.
On dit alors que la matrice est de format $(n\,;p)$.

La matrice A ci-contre peut être notée $A = (a_{i,j})$.
$a_{i,j}$ désigne le coefficient situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Au programme de terminale S, les matrices essentiellement utilisées sont

- les **matrices « carrée »**, telles que $n = p$, *i.e.* telles qu'elles ont le même nombre de lignes que de colonnes ;
- les **matrices « colonne »**, telles que $p = 1$, *i.e.* telles qu'elles ont une seule colonne et n lignes ;
- les **matrices « ligne »**, telles que $n = 1$, *i.e.* telles qu'elles ont une seule ligne et p colonnes.

Exemple 1

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $L = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,35 \\ 0,25 \end{pmatrix}$.

Définition 2

On définit **matrice nulle de rang** n de format $(n\,;n)$ avec uniquement des 0 comme coefficients. On la note 0_n.

2 Opérations et matrices

2.1 Somme

Définition 3

On considère $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices.
On suppose qu'elles sont de même format, *i.e.* que les matrices A et B ont le même nombre de lignes et de colonnes.
La **matrice somme** $A + B = (m_{i,j})$ est définie par $m_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.
Ainsi, elle est obtenue en additionnant les coefficients des matrices A et B situés aux mêmes emplacements.

Exemple 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & -1 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,35 \\ 0,25 \end{pmatrix} ; C' = \begin{pmatrix} 0,7 \\ 0 \\ 0,3 \end{pmatrix}.$$

- $A + B = \begin{pmatrix} 3+(-1) & 1+0 & 7+(-3) \\ 2+(-1) & 4+(-3) & 4+0 \\ 9+(-6) & 0+0 & 3+(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$
- $C + C' = \begin{pmatrix} 0,4+0,7 \\ 0,35+0 \\ 0,25+0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,35 \\ 0,55 \end{pmatrix}.$
- Cependant, on ne peut définir $A + C$ ni $B + C$ par exemple.

2.2 Multiplication par un nombre réel

Définition 4

On considère k un nombre réel et $A = (a_{i,j})$ une matrice.
La matrice $k \cdot A = (m_{i,j})$ est défini par $m_{i,j} = k \times a_{i,j}$.
Ainsi, elle est obtenue en multipliant chaque coefficient de la matrice A par le nombre réel k.

Exemple 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix} ; C + C' = \begin{pmatrix} 1,1 \\ 0,35 \\ 0,55 \end{pmatrix}$$

- $2A = \begin{pmatrix} 2\times 3 & 2\times 1 & 2\times 7 \\ 2\times 2 & 2\times 4 & 2\times 4 \\ 2\times 9 & 2\times 0 & 2\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 14 \\ 4 & 8 & 8 \\ 18 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$
- $\frac{1}{2}(C + C') = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times 1,1 \\ \frac{1}{2}\times 0,35 \\ \frac{1}{2}\times 0,55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,55 \\ 0,175 \\ 0,275 \end{pmatrix}.$

2.3 Produit de deux matrices

Définition 5

On considère deux matrices L et C.
On suppose que la matrice $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} \ell_1 & \cdots & \ell_n \end{pmatrix}$ est une matrice ligne à n colonnes et que la matrice $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ est une matrice colonne à n lignes.
On définit le produit $\mathrm{L} \cdot \mathrm{C}$ par le nombre réel

$$\mathrm{L} \cdot \mathrm{C} = \ell_1 \times c_1 + \cdots + \ell_n \times c_n.$$

Remarque : Bien que l'on puisse définir le produit $\mathrm{L} \cdot \mathrm{C}$, on ne définira pas le produit $\mathrm{C} \cdot \mathrm{L}$ (sauf si $n = 1$).
On prendra garde à ne pas permuter les deux membres d'un produit matriciel car *a priori* soit on n'aurait pas le même résultat, soit on écrirait une expression sans sens mathématique.
On dit que le produit matriciel est non-commutatif, *a contrario* du produit « standard » entre deux nombres réels où on peut écrire indifféremment $ab = ba$.

Exemple 4

$\mathrm{L}' = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$; $\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,35 \\ 0,25 \end{pmatrix}$

$\mathrm{L}' \cdot \mathrm{C} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0,35 \\ 0,25 \end{pmatrix} = 0,6 \times 0,4 + 0,1 \times 0,35 + 0,3 \times 0,25 = 0,35.$

Définition 6

On considère deux matrices $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})$.
On suppose que la matrice A est de format $(m\,;n)$ et que la matrice B est de format $(n\,;p)$: ainsi, le nombre de colonnes de la matrice A est le même que le nombre de lignes de la matrice B (ici c'est n).
On définit le produit $\mathrm{A.B} = (m_{i,j})$ où $m_{i,j}$ est le produit de la ligne i de la matrice A et de la colonne j de la matrice B.

Remarque : (Au risque d'insister,)
Bien que l'on puisse définir le produit A · B, on ne définira pas le produit B · A (sauf si $m = p$).
On prendra garde à ne pas permuter les deux membres d'un produit matriciel car *a priori* soit on n'aurait pas le même résultat, soit on écrirait quelque chose sans sens mathématique.

Exemple 5

$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 8 & 6 & -3 \end{pmatrix}$. On peut définir le produit M · N car M possède 2 colonnes et N possède 2 lignes. On note $\mathrm{M} \cdot \mathrm{N} = (a_{i,j})$.

$a_{1,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 2 \times 4 + 3 \times 8 = 32$ et $a_{2,3} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4 \times (-2) + (-1) \times (-3) = -5$.

$\mathrm{M} \cdot \mathrm{N} = \begin{pmatrix} 32 & 20 & -13 \\ 8 & -2 & -5 \\ 16 & 12 & -6 \end{pmatrix}$.

On peut aussi définir le produit N · M car N possède 3 colonnes et M possède3 lignes.
Cependant, si on note $\mathrm{N} \cdot \mathrm{M} = (b_{i,j})$,

$b_{1,1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \times 2 + 1 \times 4 + (-2) \times 0 = 12$ et

$b_{2,1} = \begin{pmatrix} 8 & 6 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 8 \times 2 + 6 \times 4 + (-3) \times 0 = 40$, et ainsi $\mathrm{N} \cdot \mathrm{M} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 40 & 12 \end{pmatrix}$.

On remarque néanmoins que les matrices M · N et N · M ne sont même pas de même format et *a fortiori* ne sont pas égales.

Propriété 1

Les produits suivants, dans l'ordre précisé, sont réalisables :

- une matrice ligne à n colonnes et une matrice colonne à n lignes ;
- une matrice ligne à n colonnes et une matrice carrée de format $(n\,;n)$;
- une matrice carrée de format $(n\,;n)$ et une matrice colonne à n lignes ;
- deux matrices carrées de format $(n\,;n)$. Dans ce dernier cas, on peut le définir dans les deux « sens » mais le résultat est *a priori* différent.
  On peut aussi définir $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A} \cdot \mathrm{A}$, *etc.* .

Exemple 6

$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ -1 & -3 & 0 \\ -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 46 & -3 & -16 \\ -30 & -12 & -10 \\ -27 & 0 & -30 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} \cdot \mathrm{A} = \begin{pmatrix} -30 & -1 & -16 \\ -9 & -13 & -19 \\ -27 & -6 & -45 \end{pmatrix}$, ainsi $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \cdot \mathrm{A}$.

3 Résolution de système d'équations linéaires

3.1 Inverse d'une matrice

Définition 7

n désigne un entier naturel supérieur à 2.
La **matrice identité (de rang n)** est la matrice carrée de format $(n\,;n)$ contenant des 1 sur la diagonale principale et des 0 pour les autres coefficients.

On la note $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Propriété 2

On considère A une matrice carrée de format $(n\,;n)$, alors
$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$.

Définition 8

On considère A une matrice carrée de format $(n\,;n)$.
S'il existe une matrice B telle que $A \cdot B = B \cdot A = I_n$, on dit que la matrice A est **inversible**.
La matrice B est **l'inverse** de la matrice A, et on note $B = A^{-1}$.
Ainsi, pour une matrice A inversible, $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$.

Exemple 7

La matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,1 \\ -0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$.

3.2 Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires

Propriété 3

On considère le système de deux équations à deux inconnues, d'inconnues x_1 et x_2,

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = \alpha \\ cx_1 + dx_2 = \beta \end{cases} : (S)$$

En posant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$,
le système (S) s'écrit matriciellement :
$A \cdot X = B$.
Si la matrice A est inversible, l'inconnue X s'obtient en calculant : $X = A^{-1} \cdot B$.

Exemple 8

Le système (S) est $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 = -3 \end{cases}$. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

La matrice A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1,5 \\ 1 & -0,5 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1,5 \\ 1 & -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \times 1 + 1,5 \times (-3) \\ 1 \times 1 + (-0,5) \times (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$.

On en déduit que le système (S) admet pour unique solution $x_1 = -6,5$ et $x_2 = 2,5$.

Propriété 4

On considère le système de trois équations à trois inconnues, d'inconnues x_1 ; x_2 et x_3,

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = \alpha \\ dx_1 + ex_2 + fx_3 = \beta \\ gx_1 + hx_2 + ix_3 = \gamma \end{cases} \quad : (\mathrm{S})$$

En posant $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$,

le système (S) s'écrit matriciellement :

$\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$.

Si la matrice A est inversible, l'inconnue X s'obtient en calculant : $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{B}$.

Exemple 9

Le système (Σ) est $\begin{cases} 3x + 2y + z = 2 \\ -4x + y - z = -9 \\ 2x - y + 5z = 19 \end{cases}$.

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ 19 \end{pmatrix}$.

La matrice A est inversible, d'inverse $\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0,08 & -0,22 & -0,06 \\ 0,36 & 0,26 & -0,02 \\ 0,04 & 0,14 & 0,22 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{B} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On en déduit que le système (Σ) admet pour unique solution $x = 1$; $y = -2$ et $z = 3$.

Propriété 5

Un système de n équations linéaires à n inconnues peut s'écrire matriciellement :

$\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{B}$, où les matrices A (carrée de format $(n\,;n)$), X et B (matrices colonne à n lignes) sont définies de manière analogue aux deux propriétés précédentes.

Si la matrice A est inversible, l'inconnue X s'obtient en calculant : $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{B}$.

Remarque : « Équations linéaires » signifie que les équations ne comporte que des termes en « x » et non en x^2 ; x^3 ; $\sqrt{x}$; xy ; *etc.* .