Devoir maison 1

↠ Exercice 1 : Anti-inflammatoire non stéroïdien (∗)

L'acide (RS)-2-[4-(2-méthylpropyl)phényl]propanoique, appelé plus communément ibuprofène, est un médicament couramment employé en France.
On estime qu'après ingestion d'un comprimé de 400 mg, le corps élimine chaque heure 29,3 % de la dose restante.

1. On note a_n la masse d'ibuprofène présente dans le corps au bout de n heures. Justifier que pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,707a_n$.

   Une baisse de 29,3 % est associée à un coefficient multiplicateur de $1 - 29,3\ \% = 1 - \frac{29,3}{100} = 0,707$.

   Ainsi, pour tout n, $a_{n+1} = 0,707a_n$.

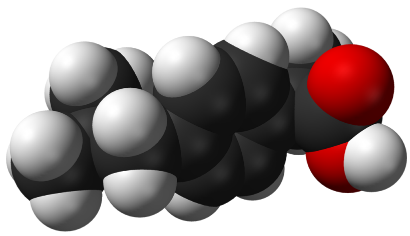
2. Justifier qu'au bout de quatre heures, le corps aura éliminé à peu près 75 % de la dose initiale.

   Comme la suite (a_n) est géométrique, on a $a_4 = 400 \times 0,707^4 \approx 99,93$ g, soit bien une diminution d'environ 75 % de la masse initiale.

3. En-dessous de 10 mg, l'ibuprofène n'est plus considéré comme actif dans l'organisme.

   Recopier les lignes 2 à 5 de l'algorithme suivant afin qu'il donne en sortie au bout de combien d'heures la masse d'ibuprofène présente dans l'organisme passe en-dessous de ce seuil.

Ligne 1	$\mathrm{N} \leftarrow 0$
Ligne 2	$\mathrm{A} \leftarrow 400$
Ligne 3	**Tant Que** $\mathrm{A} > 10$
Ligne 4	$\quad \mathrm{A} \leftarrow 0,707 \times \mathrm{A}$
Ligne 5	$\quad \mathrm{N} \leftarrow \mathrm{N} + 1$
Ligne 6	**Fin Tant Que**



4. Donner la sortie de cet algorithme.

   On trouve $\mathrm{N} = 11$.

↠ Exercice 2 : Sommation (∗∗)

Démontrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

On pose pour $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$: « $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».
Si $n = 1$, $\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1$ et $\frac{1(1+1)(2\times1+1)}{6} = 1$; ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.
On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier $n \geqslant 1$ quelconque.
Il s'agit de montrer $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Mais alors, $\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$
d'où $\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right]$.
Or, $\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) = \frac{2n^2+n+6(n+1)}{6} = \frac{2n^2+7n+6}{6}$.
En outre, $(n+2)(2n+3) = 2n^2 + 7n + 6$, et donc
$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right] = (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6}$,
montrant l'hérédité et achevant la récurrence.

↠ Exercice 3 : Une histoire de feuilles de chou (∗∗)

$(u_n)_n$ la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et la relation de récurrence :
$u_{n+1} = 0,8u_n + 1$.
On définit aussi la suite auxiliaire (v_n) par : $v_n = u_n - 5$.

Partie A : Étude mathématique

1. On donne l'algorithme suivant, qui a pour entrée N, choisi par l'utilisateur, et renvoie la valeur de U.

   ```
   U ← 3
   Pour K allant de 1 à N
      U ← 0,8U + 1
   Fin Pour
   ```

   Donner la sortie pour N = 3 et l'interpréter.

   L'algorithme donne en sortie la valeur de u_3, soit 3,976.

2. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 5 = 0,8u_n - 4 = 0,8(v_n+5) - 4 = 0,8v_n + 4 - 4 = 0,8v_n$.

   Ainsi, la suite (v_n) est géométrique de raison 0,8, et de premier terme $v_0 = u_0 - 5 = -2$.

3. En déduire l'expression explicite de la suite (v_n).

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -2 \times 0,8^n$.

4. En déduire que pour tout entier naturel n : $u_n = 5 - 2 \times 0,8^n$.

   Comme $u_n = v_n + 5$, on a bien $u_n = 5 - 2 \times 0,8^n$.

5. (a) Quel est le sens de variation de la suite (v_n) ?

   La suite (v_n) étant géométrique, de raison $0,8 \in]0;1[$ et de premier terme $-2 < 0$, elle est strictement croissante.

   (b) Justifier que $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

$v_{n+1}-v_n=(u_{n+1}-5)-(u_n-5)=u_{n+1}-5-u_n+5=u_{n+1}-u_n$.

Or, comme la suite (v_n) est strictement croissante, $v_{n+1}-v_n>0$. Mais alors, $u_{n+1}-u_n>0$, et donc la suite (u_n) est croissante.

6. Déterminer une expression de $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_k$.

   $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=\sum_{k=0}^{n}(v_k+5)=\sum_{k=0}^{n}v_k+\sum_{k=0}^{n}5$

   $S_n=-2\frac{1-0,8^{n+1}}{1-0,8}+5(n+1)=5(n+1)-10\left(1-0,8^{n+1}\right)$.

Partie B : Une application

Un magazine est vendu uniquement par abonnement. On a constaté que chaque année, il y a 1 000 nouveaux abonnés mais que 20 % des abonnés ne se réabonnent pas.

En 2018, il y avait 3 000 abonnés.

1. Montrer que la situation peut être modélisé par la suite (u_n) où u_n désignera le nombre de milliers d'abonnés l'année (2018+n) (on demande de montrer que u_n est le nombre de milliers d'abonnés l'année (2018+n)).

   Le premier terme étant $u_0=3$, il correspond bien aux 3 milliers d'abonnés en 2018.

   Puis, 20 % des abonnés ne se réabonnent pas, il en reste 80 % auxquels s'ajoutent 1 millier d'abonnés : on a bien, pour tout n, $u_{n+1}=0,8u_n+1$.

2. En déduire une estimation du nombre d'abonnés en 2023 (on arrondira à l'unité près). Même question en 2033.

   En 2023, la revue comptera $u_5\approx 4,345$ milliers d'abonnés (soit 4 345) et elle en comptera $u_{15}\approx 4,930$ milliers en 2033 (soit 4 930).

3. Si la tendance se poursuit, le magazine parviendra-t-il à dépasser la barre des 6 000 abonnés ? Justifier.

   Comme pour tout n, $-2\times 0,8^n<0$, on a $u_n<5$: ainsi le nombre d'abonnés ne dépassera jamais les 5 000, et *a fortiori* les 6 000.

4. Déterminer le nombre de magazines vendus entre 2018 et 2028.

   Entre 2018 et 2028, la revue aura écoulé $S_{10}\approx 45,859$ milliers de magazines, soit 45 859.