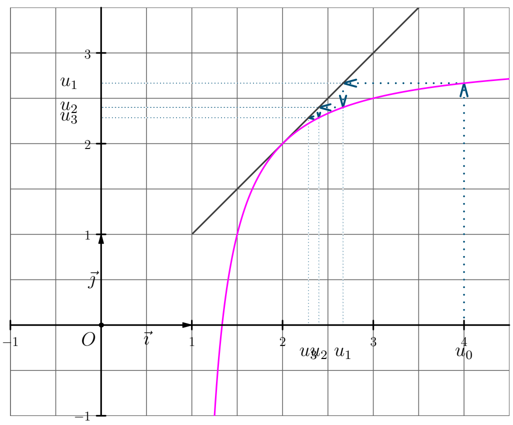
Devoir Maison 2

↠ Exercice 1

On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction $\psi : x \longmapsto \dfrac{3x-4}{x-1}$ et les premiers termes de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \psi(u_n) \end{cases}$.

1. Émettre une conjecture sur le sens de variation et la limite de cette suite.
2. Étudier le sens de variation de la fonction ψ sur $]1\,;+\infty[$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout n, $1 < u_{n+1} \leqslant u_n$.
4. La suite (u_n) converge-t-elle ?
5. Démontrer que la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ est arithmétique. En déduire u_n en fonction de n, puis la limite de la suite (u_n).



↠ Exercice 2

Une urne contient 5 boules blanches et n boules rouges, où $n \in [\![2\,;+\infty[\![$.

Partie A Un joueur tire deux fois une boule dans l'urne sans remise. Si la boule est blanche, il gagne 2 €, sinon, il perd 3 €.

On note G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur après un tirage de deux boules.

1. Démontrer que $\mathbf{P}(G = -1) = \dfrac{10n}{(n+5)(n+4)}$.
2. Déterminer en fonction de n la loi de probabilité de la variable aléatoire G.
3. Démontrer que $\mathbf{E}(G) = \dfrac{-6n^2 - 4n + 80}{(n+5)(n+4)}$.
4. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $\mathbf{E}(G) \leqslant 0$.

Partie B Un joueur tire avec remise 20 boules de suite dans l'urne, avec remise.

1. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges tirées. Déterminer en justifiant que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{n}{n+5}$.
2. Justifier que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge après 20 tirages vaille $1 - \left(\frac{5}{n+5}\right)^{20}$.
3. Compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il renvoie le plus petit entier n tel que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge après 20 tirages soit strictement supérieure à $0,99$.
4. Donner la sortie de cet algorithme.

$n \leftarrow 2$
Tant que ...
  $n \leftarrow$ ...