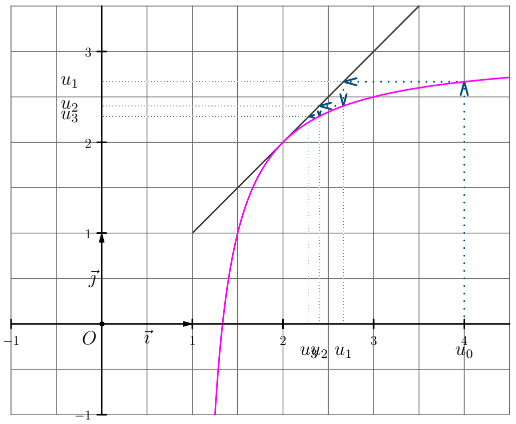
DEVOIR MAISON 2

↠ Exercice 1

On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction $\psi : x \longmapsto \dfrac{3x-4}{x-1}$ et les premiers termes de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \psi(u_n) \end{cases}$.

1. Émettre une conjecture sur le sens de variation et la limite de cette suite.
   La suite semble décroissante et converger vers 1.
2. Étudier le sens de variation de la fonction ψ sur $]1\,;+\infty[$.
   La fonction ψ est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et $\psi'(x) = \dfrac{3(x-1)-(3x-4)}{(x-1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$.
   Ainsi, la fonction ψ est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout n, $1 < u_{n+1} \leqslant u_n$. On pose $\mathcal{P}(n)$: « $1 < u_{n+1} \leqslant u_n$ ».
   Comme $u_0 = 5$ et $u_1 = \frac{11}{4}$, on a bien $1 < u_1 \leqslant u_0$, montrant $\mathcal{P}(0)$.
   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier n quelconque, on a donc $1 < u_{n+1} \leqslant u_n$.
   Mais alors, comme la fonction ψ est strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$, $g(1) < g(u_n) \leqslant g(u_{n+1})$, *i.e.* $1 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$ montrant $\mathcal{P}(n+1)$ et achevant la récurrence.
4. La suite (u_n) converge-t-elle ?
   La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge (convergence monotone).
5. Démontrer que la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$ est arithmétique. En déduire u_n en fonction de n, puis la limite de la suite (u_n).
   $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1}{u_{n+1}-2} = \dfrac{1}{\frac{3u_n-4}{u_n-1}-2} = \dfrac{u_n-1}{3u_n-4-2(u_n-1)} = \dfrac{u_n-1}{u_n+2}$.
   Or $v_n = \dfrac{1}{u_n-2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{v_n} = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{1}{v_n} + 2$, d'où
   $v_{n+1} = \dfrac{\frac{1}{v_n}+2-1}{\frac{1}{v_n}+2-2} = \dfrac{\frac{1}{v_n}+1}{\frac{1}{v_n}} = 1 + v_n$.
   La suite (v_n) est donc arithmétique de raison 1 : on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + n$.
   Or $v_0 = \dfrac{1}{u_0-2} = \frac{1}{3}$, donc $v_n = \dfrac{1}{3} + n$.
   Puis, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\frac{1}{3}+n} + 2 = \dfrac{3}{1+3n} + 2$.
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+3n = +\infty$, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{1+3n} = 0$, et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$ par somme.



↠ Exercice 2

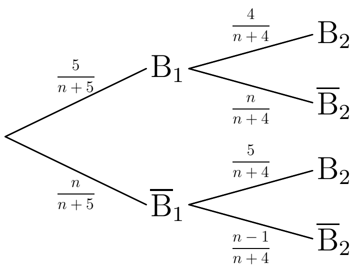
Une urne contient 5 boules blanches et n boules rouges, où $n \in [\![2;+\infty[\![$.

Partie A Un joueur tire deux fois une boule dans l'urne sans remise. Si la boule est blanche, il gagne 2 €, sinon, il perd 3 €.

On note G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique obtenu par le joueur après un tirage de deux boules.

1. Démontrer que $\mathbf{P}(G=-1)=\dfrac{10n}{(n+5)(n+4)}$.

   On note B_i : « tirer une boule blanche au tirage numéro i ».

   $\mathbf{P}(G=-1)=\mathbf{P}\left(B_1\cap\overline{B}_2\right)+\mathbf{P}\left(\overline{B}_1\cap B_2\right)=\dfrac{5}{n+5}\times\dfrac{n}{n+4}+\dfrac{n}{n+5}\times\dfrac{5}{n+4}=\dfrac{10n}{(n+4)(n+5)}$.

2. Déterminer en fonction de n la loi de probabilité de la variable aléatoire G.

   La variable aléatoire G prend les valeurs -6 ; -1 et 4.

   $\mathbf{P}(G=-6)=\mathbf{P}\left(\overline{B}_1\cap\overline{B}_2\right)=\dfrac{n}{n+5}\times\dfrac{n-1}{n+4}$

   $\mathbf{P}(G=4)=\mathbf{P}\left(B_1\cap B_2\right)=\dfrac{5}{n+5}\times\dfrac{4}{n+4}$.

3. Démontrer que $\mathbf{E}(G)=\dfrac{-6n^2-4n+80}{(n+5)(n+4)}$.

   $\mathbf{E}(G)=-6\,\mathbf{P}(G=-6)-\mathbf{P}(G=-1)+4\,\mathbf{P}(G=4)=\dfrac{-6n(n-1)}{(n+4)(n+5)}+\dfrac{-10n}{(n+4)(n+5)}+\dfrac{80}{(n+4)(n+5)}=$
   $\dfrac{-6n^2-4n+80}{(n+5)(n+4)}$.

4. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $\mathbf{E}(G)\leqslant 0$.

   $\mathbf{E}(G)\leqslant 0 \Leftrightarrow -6n^2-4n+80\leqslant 0$.

   Le discriminant vaut $(-4)^2-4\times(-6)\times 80=44^2$.

$n_1 = \dfrac{4-44}{-12} = \dfrac{10}{3}$ et $n_2 = \dfrac{4+44}{-12} = -4$.

Ainsi, $\leqslant -4$ ou $n \geqslant \dfrac{10}{3}$. On travaille avec $n \geqslant 2$, on aboutit à $n \geqslant \dfrac{10}{3}$, et comme n est un entier et que $\dfrac{10}{3} \approx 3,3$, on a $\mathbf{E}(G) \leqslant 0$ dès que $n \geqslant 4$.

Partie B Un joueur tire avec remise 20 boules de suite dans l'urne, avec remise.

1. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de boules rouges tirées. Déterminer en justifiant que la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 20 et $\frac{n}{n+5}$.
   Tirer une boule et observer si elle est rouge ou non constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $\dfrac{n}{n+5}$. Cette épreuve étant répétée de manière indépendante 20 fois, la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres 20 et $\dfrac{n}{n+5}$.
2. Justifier que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge après 20 tirages vaille $1 - \left(\frac{5}{n+5}\right)^{20}$.
   On cherche $\mathbf{P}(X \geqslant 1)$.
   $\mathbf{P}(X \geqslant 1) = 1 - \mathbf{P}(X = 0) = 1 - \left(\dfrac{5}{n+5}\right)^{20}$.
3. Compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il renvoie le plus petit entier n tel que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge après 20 tirages soit strictement supérieure à $0,99$.
4. Donner la sortie de cet algorithme.

```
n ← 2
Tant que (5/(n+5))^20 ⩾ 0,99
    n ← n + 1
```

La sortie est 2.