Devoir maison 3

↠ Exercice 1

La fonction f est définie par $f(x)=\dfrac{1}{3}\left(2x^2-3x+\dfrac{4}{x}\right)$ avec $x\neq 0$.

1. Montrer que la dérivée de la fonction f a pour expression $f'(x)=\dfrac{4x^3-3x^2-4}{3x^2}$.

   On pose $g(x)=4x^3-3x^2-4$.

2. (a) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1\,;2[$.

   (c) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

   (d) Donner, sans justifier, le tableau de signes de la fonction g.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On justifiera soigneusement les limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$, les deux autres seront données sans justification.

↠ Exercice 2

Jean-Kévin débute un jeu dans lequel il a autant de chance de gagner ou de perdre la première partie. On admet que, s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est 0,5 , et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,7.
On note, pour n entier naturel non nul, G_n : « Jean-Kévin gagne la n-ème partie » et P_n : « Jean-Kévin perd la n-ème partie ».

1. On pose, pour n entier naturel non nul, $x_n=\mathbf{P}(G_n)$ et $y_n=\mathbf{P}(P_n)$. On a donc $x_0=y_0=0,5$.

   Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^\times$: $\begin{cases} x_{n+1}=0,5x_n+0,3y_n \\ y_{n+1}=0,5x_n+0,7y_n\end{cases}$.

2. Pour $n\in\mathbb{N}^\times$, on pose $v_n=x_n+y_n$ et $w_n=5x_n-3y_n$.

   (a) Justifier que la suite (v_n) est constante de terme général égal à 1.

   (b) Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et exprimer w_n en fonction de n.

3. (a) En remarquant que $y_n=\dfrac{1}{8}(5v_n-w_n)$, déduire l'expression de y_n en fonction de n puis celle de x_n.

   (b) Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge et déterminer sa limite. Qu'en est-il pour la suite $(y_n)_n$?