Devoir maison 3

↠ Exercice 1

La fonction f est définie par $f(x) = \frac{1}{3}\left(2x^2 - 3x + \frac{4}{x}\right)$ avec $x \neq 0$.

1. Montrer que la dérivée de la fonction f a pour expression $f'(x) = \frac{4x^3 - 3x^2 - 4}{3x^2}$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$ et pour tout $x \neq 0$,
   $f'(x) = \frac{1}{3}\left(4x^2 - 3x - \frac{4}{x^2}\right) \frac{4x^3 - 3x^2 - 4}{3x^2}$,
   et on retrouve l'expression attendue.
   On pose $g(x) = 4x^3 - 3x^2 - 4$.
2. (a) Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 12x^2 - 6x$.
   On remarque que $g'(x) = 6x(2x - 1)$ et donc les racines de g' sont 0 et 0,5.
   Ainsi, g' est strictement positive sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0,5; +\infty[$ et est strictement négative sur $]0; 0,5[$.
   Par suite, g est strictement croissante sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0,5; +\infty[$ et est strictement décroissante sur $]0; 0,5[$.

   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]1; 2[$.
   Déjà, g admet un maximum en 0 sur $]-\infty; 0,5]$ en 0 et comme $g(0) = -4 < 0$, $g(x) = 0$ n'a aucune solution sur cet intervalle.
   Puis, comme g est continue et strictement croissante sur $[0,5; +\infty[$ et comme $g(1) < 0$ et $g(2) > 0$, elle admet une unique solution α sur $[0,5; +\infty[$, avec $\alpha \in]1; 2[$, de par un théorème des valeurs intermédiaires, version unicité.

   (c) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.
   Comme $g(1,3) < 0$ et $g(1,4) > 0$, $\alpha \in]1,3; 1,4[$.

   (d) Donner, sans justifier, le tableau de signes de la fonction g.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. On justifiera soigneusement les limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$, les deux autres seront données sans justification.

x	$-\infty$	0		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	$-$	||	$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow$	$f(\alpha) \approx 0{,}85$	$\nearrow +\infty$	

$\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} -3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 2x^2 = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} -3x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{4}{x} = +\infty$, donc par somme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$.

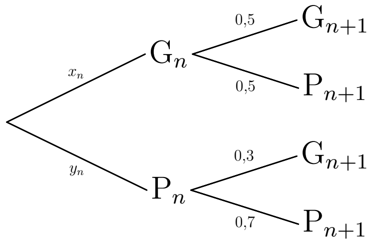
↠ Exercice 2

Jean-Kévin débute un jeu dans lequel il a autant de chance de gagner ou de perdre la première partie. On admet que, s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est 0,5 , et s'il perd une partie, la probabilité qu'il perde la suivante est 0,7.

On note, pour n entier naturel non nul, G_n : « Jean-Kévin gagne la n-ème partie » et P_n : « Jean-Kévin perd la n-ème partie ».

1. On pose, pour n entier naturel non nul, $x_n = \mathbf{P}(G_n)$ et $y_n = \mathbf{P}(P_n)$. On a donc $x_1 = y_1 = 0{,}5$.

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$: $\begin{cases} x_{n+1} = 0{,}5x_n + 0{,}3y_n \\ y_{n+1} = 0{,}5x_n + 0{,}7y_n \end{cases}$.



2. Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, on pose $v_n = x_n + y_n$ et $w_n = 5x_n - 3y_n$. ,

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$,

   $x_{n+1} = \mathbf{P}(G_n \cap G_{n+1}) + \mathbf{P}(P_n \cap P_{n+1}) = 0{,}5x_n + 0{,}3y_n$.

   $y_{n+1} = \mathbf{P}(G_n \cap P_{n+1}) + \mathbf{P}(P_n \cap P_{n+1}) = 0{,}5x_n + 0{,}7y_n$.

   (a) Justifier que la suite (v_n) est constante de terme général égal à 1.

   Comme $G_n = \overline{P}_n$, on a pour tout n, $\mathbf{P}(G_n) + \mathbf{P}(P_n) = 1$, *i.e.* $x_n + y_n = 1$.

   (b) Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et exprimer w_n en fonction de n.

   Pour tout n,

   $w_{n+1} = 5(0{,}5x_n + 0{,}3y_n) - 3(0{,}5x_n - 0{,}7y_n) = x_n - 0{,}6y_n = \dfrac{1}{5}(5x_n - 3y_n) = \dfrac{1}{5}w_n$.

   Ainsi, la suite (w_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$ et de premier terme $w_1 = 0{,}5 + 0{,}5 = 1$,

   d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, $w_n = \left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}$.

3. (a) En remarquant que $y_n = \frac{1}{8}(5v_n - w_n)$, déduire l'expression de y_n en fonction de n puis celle de x_n.

   Déjà, pour tout n, $\frac{1}{8}(5v_n - w_n) = \frac{1}{8}(5x_n + 5y_n - 5x_n + 3y_n) = y_n$.

   Ainsi, pour tout n, $y_n = \frac{1}{8}\left(5 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right) = \frac{5}{8} - \frac{5}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

   Ensuite, $x_n = 1 - y_n = \frac{3}{8} + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$.

   (b) Montrer que la suite $(x_n)_n$ converge et déterminer sa limite. Qu'en est-il pour la suite $(y_n)_n$?

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{3}{8}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \frac{5}{8}$.