Devoir maison 4

Exercice 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$.

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. (a) Rédiger un algorithme en langage naturel qui à un entier naturel n renvoie le terme u_n.
   (b) Donner les termes u_n pour $n \in [\![1\,;9]\!]$.
   (c) Donner le sens de variation de la suite (u_n) et conjecturer sa convergence éventuelle.
2. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$.
   (a) Conjecturer son sens de variation.
   (b) Justifier que $v_0 = 0$ et $v_1 = 1,5$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n + \frac{3}{2}$.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$.
   (e) En déduire que la suite (v_n) converge.
   On note ℓ_1 sa limite.
   (f) ℓ_1 vérifier $\ell_1 = \frac{1}{4}\ell_1 + \frac{3}{2}$. Déterminer ℓ_1.
3. En utilisant une démarche analogue à la question précédente, justifier que la suite (w_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $w_n = u_{2n+1}$, est convergente.
4. On admet le résultat suivant :
   si pour une suite (u_n), les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, et convergent vers la même limite, alors la suite (u_n) converge vers cette même limite.
   Conclure sur la convergence et la limite de la suite (u_n).

Exercice 2

Le but de cet exercice est de démontrer la propriété de croissance comparée de la fonction exponentielle :

$$\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0 \ \&\ \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$$

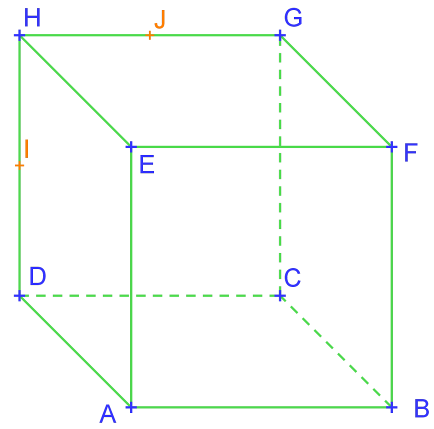
On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \mathrm{e}^x - x^2$.

1. Déterminer les expression de g' et g''.
2. Justifier que la fonction g'' ne s'annule qu'en une seule valeur $\alpha < 1$ sur $\mathbb{R}$. En déduire le tableau de variation de la fonction g'.
3. Justifier $g''(\alpha) = 0 \Rightarrow g'(\alpha) = 2(1-\alpha)$. En déduire que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Prouver que pour $x >$, $g(x) > 0$, puis que $\frac{\mathrm{e}^x}{x} > x$.
5. Justifier alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.
6. En posant $\mathrm{X} = -x$, et en partant de $\lim_{\mathrm{X}\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{X}}}{\mathrm{X}} = +\infty$, prouver que $\lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$.

↠ Exercice 3

ABCDEFGH est un cube.

1. I et J sont les milieux respectifs des arêtes [DH] et [GH].
   Construire la section du plan (BIJ) avec le cube ABCDEFGH. Justifier le protocole de construction.



2. K est point de l'arête [EH] tel que $EK = \frac{1}{3}EH$.
   (a) Justifier que les plans (BCG) et (DKF) sont sécants.
   (b) Construire l'intersection de ces deux plans.
   (c) En déduire la section du plan (DKF) avec le cube ABCDEFGH.