Devoir Maison 2

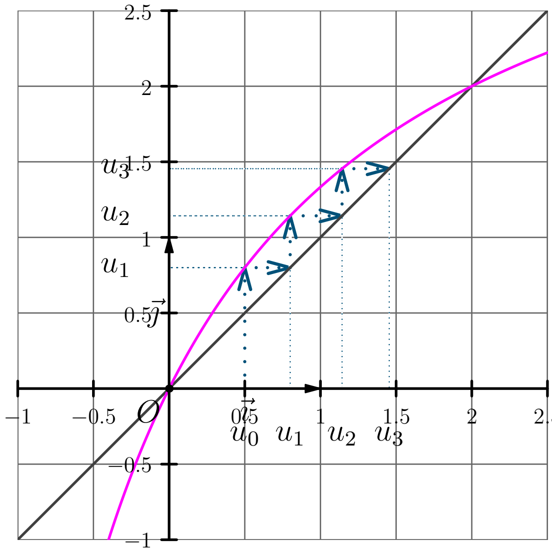
Exercice 1

On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction $\psi : x \longmapsto \dfrac{3x}{1+2x}$ et les premiers termes de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Émettre une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. (a) Étudier le sens de variation de la fonction ψ sur $]0;+\infty[$.

   (b) On admet que pour tout n, $u_n > 0$. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
3. Démontrer par récurrence que pour tout n, $u_n - 1 > 0$.
4. Démontrer que la suite $(v_n)_n$ définie pour tout n par $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 2}$ est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$.

   En déduire u_n en fonction de n.



Exercice 2

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 8n + 8 \end{cases}$.

1. Compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il calcule la valeur de u_n, où n sera choisi par l'utilisateur.
2. Justifier que $(2n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 9$.

Entrée	n
Traitement	Affecter à u la valeur … **Pour** k allant de 1 à n Affecter à u la valeur …
Sortie	Afficher u

3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2n+1)^2$.

Exercice 3

Une urne contient 10 boules dont 4 noires. On tire successivement et avec remise, vingt boules de l'urne. La variable aléatoire X est égale au nombres de boules noires tirées.

1. Déterminer la loi de X, en justifiant. Détailler le calcul de $\mathbf{P}(X = 2)$.
2. Donner et interpréter $\mathbf{P}(7 \leqslant X \leqslant 9)$ (ne pas détailler le calcul).
3. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.