Devoir Maison 2

Exercice 1

On a représenté ci-dessous la courbe représentative de la fonction $\psi : x \longmapsto \dfrac{3x}{1+2x}$ et les premiers termes de la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

1. Émettre une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
   Cette suite semble croissante.
2. (a) Étudier le sens de variation de la fonction ψ sur $]0;+\infty[$.
   La fonction ψ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et
   $\psi'(x) = \dfrac{3(1+2x)-2\times 3x}{(1+2x)^2} = \dfrac{3}{(1+2x)^2} > 0.$
   Ainsi, la fonction ψ est croissante sur $]0;+\infty[$.

   (b) On admet que pour tout n, $u_n > 0$. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
   On pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».
   Comme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_1 = \dfrac{\frac{3}{2}}{2} = \dfrac{3}{4}$, on a bien $u_0 \leqslant u_1$.
   $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier n.
   Ainsi, $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   Comme la fonction ψ est croissante sur $]0;+\infty[$ et que $u_n > 0$, on a
   $\psi(u_n) \leqslant \psi(u_{n+1})$, et don c$u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.
   $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, montrant l'hérédité et achevant la récurrence.
3. Démontrer par récurrence que pour tout n, $u_n - 1 < 0$.
   On pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n < 1$ ».
   Comme $u_0 - 1 = -\dfrac{1}{2}$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   Puis, si on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier n, on a $u_n - 1 < 0$.
   Mais alors $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} - 1 = \dfrac{3u_n - 1 - 2u_n}{1+2u_n} = \dfrac{u_n - 1}{1+2u_n}$.
   Or $u_n - 1 <$ et $1 + 2u_n > 0$ car $u_n > 0$, et donc on a $u_{n+1} < 0$,
   montrant l'hérédité et achevant la récurrence.
4. Démontrer que la suite $(v_n)_n$ définie pour tout n par $v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$ est géométrique de raison 3.
   En déduire u_n en fonction de n.
   $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} = \dfrac{\frac{3u_n}{1+2u_n}}{\frac{3u_n}{1+2u_n} - 1} = \dfrac{3u_n}{3u_n - 1 - 2u_n} = \dfrac{3u_n}{u_n - 1} = 3\dfrac{u_n}{u_n - 1} = 3v_n.$

La suite $(v_n$ est géométrique de raison 3 et donc, pour tout n,
$v_n = v_0 \times 3^n = -\dfrac{1}{3} \times 3^n = -3^{n-1}$.
Ainsi,
$$-3^{n-1} = \frac{u_n}{u_n - 1} \iff -3^{n-1}(u_n - 1) = u_n \iff 3^{n-1} = u_n\left(1 + 3^{n-1}\right) \iff u_n = \frac{3^{n-1}}{1 + 3^{n-1}}.$$

↠ Exercice 2

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 8n + 8 \end{cases}$.

1. Compléter l'algorithme ci-contre afin qu'il calcule la valeur de u_n, où n sera choisi par l'utilisateur.

   L'entrée est un entier naturel n.

$u \leftarrow 1$ **Pour** k allant de 1 à n $\quad u \leftarrow u + 8k + 8$

   La sortie est u.
2. Justifier que $(2n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 9$.
   $(2n+3)^2 = (2n)^2 + 2 \times 2n \times 3 + 3^2 = 4n^2 + 12n + 9$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2n+1)^2$.
   On pose $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = (2n+1)^2$ ».
   Déjà, comme $(2 \times 0 + 1)^2 = 1$ et $u_0 = 1$, on a bien $u_n 0 = (2 \times +1)^2$.
   Puis, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier n.
   On a alors $u_n = (2n+1)^2$.
   Puis, $u_n + 8n + 8 = (2n+1)^2 + 8n + 8$
   d'où $u_{n+1} = 4^n + 4n + 1 + 8n + 8 = 4n^2 + 12n + 9 = (2n+1)^3 = [2(n+1)+1]^2$,
   montrant $\mathcal{P}(n+1)$ et achevant la récurrence.

↠ Exercice 3

Une urne contient 10 boules dont 4 noires. On tire successivement et avec remise, vingt boules de l'urne. La variable aléatoire X est égale au nombres de boules noires tirées.

1. Déterminer la loi de X, en justifiant. Détailler le calcul de $\mathbf{P}(X = 2)$.
   Tirer une boule de l'urne et observer sa couleur constitue une épreuve de Bernoulli dont le succès est « la boule est noire », de paramètre $\dfrac{4}{10} = 0,4$. Cette épreuve est répétée de manière indépendante (« avec remise ») 20 fois.
   Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres 2 et 0,4.
   $\mathbf{P}(X = 2) = \binom{10}{2} \times 0,4^2 + 0,6^8 \approx 0,003$.
2. Donner et interpréter $\mathbf{P}(7 \leqslant X \leqslant 9)$ (ne pas détailler le calcul).
   $\mathbf{P}(7 \leqslant X \leqslant 9) \approx 0,505$.
   C'est la probabilité d'avoir eu entre 7 et 9 boules noires à l'issue des 20 tirages.
3. Calculer l'espérance de X. Interpréter ce résultat.
   $\mathbf{E}(X) = 20 \times 0,4 = 8$.
   C'est le nombre moyen de boules noires tirées à l'issue de 20 tirages.