Devoir maison 3

↠ Exercice 1

Partie A

On considère l'équation

$$(\mathrm{E}) : \qquad 17x - 26y = 1,$$

où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-3\,;-2)$ est solution de (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u\,;v)$ solution de (E) tel que $0 \leqslant u \leqslant 25$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

- on calcule $17x + 23$
- on calcule le reste de la division euclidienne de $17x + 23$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.
Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $17 \times 11 + 23 = 210$ or $210 \equiv 2 \pmod{26}$; 2 est le reste de la division euclidienne de 210 par 26. Au nombre 2 correspond la lettre C.
La lettre L est donc codée par la lettre C.

1. Coder la lettre W.
2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.
   (a) Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a
   $$17x \equiv j \pmod{26} \text{ équivaut à } x \equiv 23j \pmod{26}.$$
   (b) Décoder la lettre W.

↠ Exercice 2

On se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs n vérifiant le couple $\begin{cases} n \equiv 9 \pmod{17} \\ n \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$.

1. On désigne par $(u\,;v)$ un couple d'entiers tel que $17u+5v=1$.
   (a) Justifier l'existence d'un tel couple $(u\,;v)$.
   (b) On pose $n_0 = 3\times 17u + 9\times 5v$.
   Démontrer que si $(u\,;v)$ est tel que $17u+5v=1$, alors $n_0 \in S$.
2. (a) On s'intéresse à $n \in S$. Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \pmod{85}$.
   (b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à S si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$, avec k un entier relatif.
3. Ada sait qu'elle possède entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3. Combien a-t-elle de jetons ?

Ada Lovelace, *de son nom complet Augusta Ada* King, *comtesse de* Lovelace, *née Ada* Byron *le 10 décembre 1815 à* Londres *et morte le 27 novembre 1852 à* Marylebone *dans la même ville, est une pionnière de la science informatique. Elle est principalement connue pour avoir réalisé le premier programme informatique, lors de son travail sur un ancêtre de l'ordinateur : la machine analytique de Charles* Babbage.

⊛ Théorème 1 : théorème des restes chinois

Pour $n_1\,;\cdots;n_r$ des entiers deux à deux premiers entre eux ($i \neq j \Rightarrow \text{pgcd}(n_i\,;n_j)=1$) et pour $a_1\,;\cdots;a_r$ des entiers, il existe un un unique entier x modulo $n = \prod_{k=1}^{r} n_k$ tel que $\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ \vdots \\ x \equiv a_r \pmod{n_r} \end{cases}$.

On peut trouver x déterminant u_i et v_i tels que $u_i n_i + v_i \frac{n}{n_i} = 1$ et x est alors solution du système $\begin{cases} v_i \frac{n}{n_i} \equiv 1 \pmod{n_i} \\ v_i \frac{n}{n_i} \equiv 0 \pmod{n_j} \text{ pour } j \neq i \end{cases}$.