Devoir maison 3

↠ Exercice 1

Partie A

On considère l'équation

$$(E): \qquad 17x - 26y = 1,$$

où x et y désignent deux nombres entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple $(-3\,;-2)$ est solution de (E).
   Comme $17\times(-3)-26\times(-2)=1$, $(-3\,;-2)$ est bien une solution de (E).
2. Résoudre alors l'équation (E).
   $(E) \Leftrightarrow 17x-26y=1 \Leftrightarrow 17x-26y=17\times(-3)-26\times(-2) \Leftrightarrow 17(x+3)=26(y+2)$.
   Donc $17|26(y+2)$, or $\text{pgcd}(17\,;26)=1$, donc par le lemme de Gauss, $17|y+2$: il existe un entier k tel que $17k=y+2$, *i.e.* $y=17k-2$.
   Puis $17(x+3)=26(y+2) \Leftrightarrow 17(x+3)=26\times 17k$, d'où $x+3=26k$ et donc $x=26k-3$.
   Si $(x\,;y)$ est solution de (E), il existe un entier k tel que $\begin{cases} x=26k-3 \\ y=17k-2 \end{cases}$; k est donc un tel entier.
   Réciproquement, si pour $k\in\mathbb{Z}$, on pose $\begin{cases} x=26k-3 \\ y=17k-2 \end{cases}$, on a
   $17x-26y=17\times 26k+17\times(-3)-26\times 17k-26\times(-2)=1$.
   Ainsi, $\mathrm{S}=\{(26k-3\,;17k-2), k\in\mathbb{Z}\}$.
3. En déduire le couple d'entiers relatifs $(u\,;v)$ solution de (E) tel que $0\leqslant u\leqslant 25$.
   On cherche $k\in\mathbb{Z}$ tel que $0\leqslant 26k-3\leqslant 25 \Leftrightarrow \frac{3}{26}\leqslant k\leqslant \frac{28}{26}$. Comme k est un entier, seul $k=1$ convient, le couple cherché est donc $(23\,;15)$.

Partie B

On assimile chaque lettre de l'alphabet à un nombre entier comme l'indique le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On « code » tout nombre entier x compris entre 0 et 25 de la façon suivante :

- on calcule $17x+23$
- on calcule le reste de la division euclidienne de $17x+23$ par 26, que l'on appelle y.

x est alors « codé » par y.
Ainsi, par exemple, la lettre L est assimilée au nombre 11 ; $17\times 11+23=210$ or

$210 \equiv 2 \pmod{26}$; 2 est le reste de la division euclidienne de 210 par 26. Au nombre 2 correspond la lettre C.
La lettre L est donc codée par la lettre C.

1. Coder la lettre W.
   La lettre W est représentée par 22. Or, $17 \times 11 + 23 = 397$ et $397 \equiv 7 \pmod{26}$. 7 représentant H, W est codée par H.
2. Le but de cette question est de déterminer la fonction de décodage.
   (a) Montrer que pour tous nombres entiers relatifs x et j, on a
   $$17x \equiv j \pmod{26} \text{ équivaut à } x \equiv 23j \pmod{26}.$$
   Si $17x \equiv j \pmod{26}$, alors $23 \times 17x \equiv 23j \pmod{26}$.
   Or $17 \times 23 \equiv 1 \pmod{26}$, donc on a $x \equiv 23j \pmod{26}$.
   Réciproquement, si $x \equiv 23j \pmod{26}$, alors $17x \equiv 17 \times 23j \pmod{26}$, et donc $17x \equiv j \pmod{26}$.
   On a donc l'équivalence souhaitée.
   N.B. : on a ainsi une méthode de décryptage : si x est codée par y, alors
   $17x + 23 \equiv y \pmod{26}$, d'où $17x \equiv y - 23 \pmod{26}$, soit $x \equiv 23(y-23) \pmod{26}$, donnant $x \equiv 23y + 9 \pmod{26}$.
   Ainsi, il suffit de faire $23y + 9$ et de déterminer son reste modulo 26.
   (b) Décoder la lettre W.
   On cherche x tel que $17x + 23 \equiv 22 \pmod{26}$,
   d'où $17x \equiv -1 \pmod{26}$, d'où $x \equiv -23 \pmod{26}$ et donc $x \equiv 3 \pmod{26}$.
   3 représente D, donc D code W.

↠ Exercice 2

On se propose de déterminer l'ensemble S des entiers relatifs n vérifiant le couple
$\begin{cases} n \equiv 9 \pmod{17} \\ n \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$.

1. On désigne par $(u\,;v)$ un couple d'entiers tel que $17u + 5v = 1$.
   (a) Justifier l'existence d'un tel couple $(u\,;v)$.
   Le pgcd de 17 et de 5 valant 1, un tel couple existe de par le théorème de Bézout : on a ainsi par exemple$17 \times (-2) + 5 \times 7 = 1$.
   (b) On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
   Démontrer que si $(u\,;v)$ est tel que $17u + 5v = 1$, alors $n_0 \in$ S.
   Comme $17u + 5v = 1$, on a $5v = 1 - 17u$, et donc
   $n_0 = 3 \times 17u + 9(1 - 17u) = -6 \times 17u + 9 \equiv 9 \pmod{17}$.
   De même, comme $17u = 1 - 5v$,
   $n_0 = 3(1 - 5v) + 9 \times 5v = 3 - 6 \times 5v \equiv 3 \pmod{5}$.
   On a bien $n_0 \in$ S.
2. (a) On s'intéresse à $n \in$ S. Démontrer que $n - n_0 \equiv 0 \pmod{85}$.

Déjà, $n - n_0 \equiv 0 \pmod 5$ et $n - n_0 \equiv 0 \pmod{17}$.

Ainsi, 5 divise $n - n_0$ et 17 divise $n - n_0$.

Or 17 et 5 sont premiers entre eux, donc $17 \times 5 = 85$ divise $n - n_0$,
soit $n - n_0 \equiv 0 \pmod{85}$.

(b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à S si et seulement si il peut s'écrire sous la forme $n = 43 + 85k$, avec k un entier relatif.

Si $n \in$ S, alors $n - n_0 \equiv 0 \pmod{85}$, et donc il existe un entier k tel n= $n_0 + 85k$.

En outre, pour $u = -2$ et $v = 5$, on a $n_0 = 43$ et donc $n = 43 + 85k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $n = 43 + 85k$ pour $k \in \mathbb{Z}$,

$n \equiv 9 \pmod{17}$ et $n \equiv 3 \pmod 5$.

Ainsi, n appartient à S si et seulement si il existe un entier k tel que $n = 43 + 85k$.

3. Ada sait qu'elle possède entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3. Combien a-t-elle de jetons ?

Un tel entier appartient à S : en effet, il vérifie bien les congruences $n \ equiv 9 \pmod{17}$ et $n \equiv 3 \pmod 5$.

Il existe donc un entier k tel $n = 43 + 85k$, on en considère donc un.

On cherche alors k tel que $300 \leqslant n \leqslant 400 \Leftrightarrow \frac{257}{85} \leqslant k \leqslant \frac{357}{85}$. k est un entier, seul $k = 3$ vérifie cette double inégalité.

Ada possède donc 383 jetons.