Devoir maison 4

Exercice 1

Partie A : préliminaires

1. (a) n et N sont deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que $n^2 \equiv \mathrm{N}-1 \pmod{\mathrm{N}}$.
   Montrer que $n \times n^3 \equiv 1 \pmod{\mathrm{N}}$.

   (b) Déduire de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \pmod{26}$.
   On admettra que l'unique entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 25$ et $5k \equiv 1 \pmod{26}$ vaut 21.

2. On donne les matrices : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer la matrice $6\mathrm{A} - \mathrm{A}^2$.

   (b) En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme $\mathrm{A}^{-1} = \alpha\mathrm{I} + \beta\mathrm{A}$, ou α et β sont deux réels que l'on déterminera.

   (c) Vérifier que : $\mathrm{B} = 5\mathrm{A}^{-1}$.

   (d) Démontrer que si $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$, alors $5\mathrm{X} = \mathrm{BY}$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice X est transformée en la matrice $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $\mathrm{Y} = \mathrm{AX}$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $\mathrm{R} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU » (mot à coder) $\rightarrow \mathrm{X} \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{R} = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow$ « YE » (mot codé).

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. Démontrer que : $\left\{ \begin{array}{rcl} 5x_1 & = & 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 & = & -3y_1 + 4y_2 \end{array} \right.$.
2. En utilisant la question 1. b. de la **partie A**, établir que :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & \equiv & 16y_1 + 5y_2 \\ x_2 & \equiv & 15y_1 + 6y_2 \end{array} \right. \quad \text{modulo } 26$$

3. Décoder le mot « QP ».

↠ Exercice 2

La distance au sol, en km, d'un débris spatial est donné en fonction du temps t, en min par $d(t) = at^2 + bt + c$ où a ; b et c désignent des nombres réels.

On sait que :

- le débris spatial est entré dans la thermosphère au temps $t = 0$;
- au bout d'une demi-heure, le débris se situait à 346 km du sol ;
- une demi-heure plus tard, le débris se situait à 256 km du sol.

Exosphère	Au-delà de 400 km
Thermosphère	Entre 85 et 400 km
Mésosphère	Entre 50 et 85 km
Stratosphère	Entre 15 et 50 km
Troposphère	Entre 0 et 15 km

1. (a) Justifier que ces informations permettent d'écrire le système $\begin{cases} c = 400 \\ 900a + 30b + c = 346 \\ 3\,600a + 60b + c = 256 \end{cases}$.

   (b) Écrire ce système sous la forme matricielle $AX = B$ où A, M et B sont des matrices à préciser.

   (c) Résoudre cette équation.

2. Les réponses seront arrondies à l'unité.

   (a) À quel moment le débris est-il entré dans la stratosphère ?

   (b) Quand s'est-il écrasé au sol ?

   (c) Combien de temps a-t-il mis pour traverser la thermosphère ?