DEVOIR MAISON 4

↠ Exercice 1

Partie A : préliminaires

On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la matrice $12A - A^2$.
2. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1}, peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, où α et β sont deux réels que l'on déterminera.
3. Vérifier que : $B = 11A^{-1}$.
4. Démontrer que si $AX = Y$, alors $11X = BY$.

Partie B : procédure de codage

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU » (mot à coder) $\to X \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 178 \\ 184 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 22 \\ 2 \end{pmatrix} \to$ « WC » (mot codé).

1. Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.

1. Démontrer que : $\begin{cases} 11x_1 = 5y_1 - 4y_2 \\ 11x_2 = -6y_1 + 7y_2 \end{cases}$.
2. On admettra que l'unique entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 25$ et $11k \equiv 1 \pmod{26}$ vaut 19. Établir que :

$$\begin{cases} x_1 \equiv 17y_1 + 2y_2 \\ x_2 \equiv 16y_1 + 3y_2 \end{cases} \quad \text{modulo } 26$$

3. Décoder le mot « FS ».

↠ Exercice 2

La distance au sol, en km, d'un débris spatial est donné en fonction du temps t, en min par $d(t) = at^2 + bt + c$ où a ; b et c désignent des nombres réels.

On sait que :

- le débris spatial est entré dans la thermosphère au temps $t = 0$;
- au bout de trois-quart, le débris se situait à 314 km du sol ;
- une demi-heure plus tard, le débris se situait à 272 km du sol.

Exosphère	Au-delà de 400 km
Thermosphère	Entre 85 et 400 km
Mésosphère	Entre 50 et 85 km
Stratosphère	Entre 15 et 50 km
Troposphère	Entre 0 et 15 km

1. (a) Justifier que ces informations permettent d'écrire le système $\begin{cases} c = 400 \\ 2\,025a + 45b + c = 314 \\ 5\,625a + 75b + c = 272 \end{cases}$.

   (b) Écrire ce système sous la forme matricielle AX = B où A, M et B sont des matrices à préciser.

   (c) Résoudre cette équation.

2. Les réponses seront arrondies à l'unité.

   (a) À quel moment le débris est-il entré dans la stratosphère ?

   (b) Quand s'est-il écrasé au sol ?

   (c) Combien de temps a-t-il mis pour traverser la thermosphère ?

N.B. : $\pi \approx 3,14$ et $\mathrm{e} \approx 2,72$.

↠ Exercice 3

1. n et N sont deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que $n^2 \equiv N - 1 \pmod{N}$.
   Montrer que $n \times n^3 \equiv 1 \pmod{N}$.
2. Déduire de la question précédente un entier k tel que : $9k \equiv 1 \pmod{82}$.
3. Donner $k' \in [\![0\,;81]\!]$ tel que $k' \equiv k \pmod{82}$.

« Je [G. H. HARDY] me rappelle qu'une fois en allant le voir [RAMANUJAN] lorsqu'il était couché et malade à Putney, j'ai été conduit dans un taxi-cab portant le numéro 1 729, et remarquai que le nombre 7 · 13 · 19 semblait plutôt ennuyeux, et j'espérai qu'il ne fût pas un présage défavorable. "Non", me dit-il, "c'est un nombre très intéressant ; il est le plus petit nombre exprimable comme une somme de deux cubes [positifs] en deux manières différentes". »
En effet, $1\,729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$.
RAMANUNJAN fut un grand annonceur de formule telle que

$$1 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9} + \cdots + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{5}{1 + \cdots}}}}}} = \sqrt{\frac{\mathrm{e}\pi}{2}}$$

$$\pi = \frac{9\,801}{2\sqrt{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \times \frac{1\,103 + 26\,390n}{(4 \times 99)^{4n}}}$$

la deuxième fournissant 8 décimales de π à chaque nouveau terme de la série $\sum$.