Devoir surveillé 1

↠ Exercice 1

La suite (a_n) est définie par $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \end{cases}$.

1. Calculer a_2 et a_3.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\frac{3}{2} \leqslant a_n \leqslant 2$.

↠ Exercice 2

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \end{cases}$.

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant, qui prend en entrée une valeur n choisie par l'utilisateur, afin qu'il renvoie la valeur u_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 5$.

Ligne 1	$u \leftarrow \dots$
Ligne 2	$n \leftarrow 0$
Ligne 3	**Pour** k allant de 1 à n
Ligne 4	$u \leftarrow \dots$
Ligne 5	$n \leftarrow \dots$
Ligne 6	**Fin Pour**

↠ Exercice 3

Les suites (w_n) et (v_n) sont définies par $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = -\frac{1}{2}w_n^2 + 3w_n - \frac{3}{2} \end{cases}$ et $v_n = w_n - 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il renvoie le plus petit entier n tel $w_n \geqslant 2,99$.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
4. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right).$$
5. En déduire le sens de variation de la suite (v_n) puis de la suite (w_n).

Ligne 1	$w \leftarrow \dots$
Ligne 2	$n \leftarrow 0$
Ligne 3	**Tant que** $\dots$
Ligne 4	$w \leftarrow \dots$
Ligne 5	$n \leftarrow \dots$
Ligne 6	**Fin Tant que**

↠ Exercice 4

Pour deux évènements A et B, on donne $\mathbf{P}_B(A) = 0,554$; $\mathbf{P}_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0,64$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = 0,348$.

1. Calculer $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$.
2. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

↠ Exercice 5

Dans une planète lointaine, vivent les Gamma, les Zêta et les Êta.
Les Gamma représentent 25 % de la population de la planète et les Êta 40 %. En outre, 30 % des Gamma, 65 % des Zêta et 50 % des Êta vivent dans l'hémisphère Nord de cette planète.
On définit les évènements

- G : « l'habitant est un Gamma » ;
- Z : « l'habitant est un Zêta » ;
- H : « l'habitant est un Êta » ;
- N : « l'habitant vit dans l'hémisphère Nord ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer les probabilités des évènements $G \cup Z$ et $G \cap \overline{N}$.
3. Déterminer la probabilité qu'un habitant vive dans l'hémisphère Sud.
4. Passant dans l'hémisphère Nord de cette planète, quelle est la probabilité de croiser un Êta ? Cette probabilité était-elle la même si on était dans l'hémisphère Sud ?