Devoir surveillé 1

↠ Exercice 1 : $0,5+2,5$

La suite (a_n) est définie par $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \end{cases}$.

1. Calculer a_2 et a_3.
   $a_2 = 1 + \frac{1}{1} = 2$ et $a_3 = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$, $\frac{3}{2} \leqslant a_n \leqslant 2$.
   On note $\mathcal{P}(n)$: « $1,5 \leqslant a_n \leqslant 2$ ».
   Déjà, si $n = 2$, $a_2 = 2$ et donc on a bien $1,5 \leqslant a_2 \leqslant 2$.
   Puis, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier $n \geqslant 2$, et donc $1,5 \leqslant a_n \leqslant 2$.
   Mais alors, comme la fonction inverse est décroissante sur $]0;+\infty[$, $\frac{1}{1,5} \geqslant \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{1}{2}$,
   d'où $0,5 \leqslant \frac{1}{a_n} \leqslant \frac{2}{3}$,
   puis $1 + 0,5 \leqslant 1 + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{2}{3}$,
   i.e., $1,5 \leqslant a_{n+1} \leqslant \frac{5}{3}$.
   Or $\frac{5}{3} < 2$, d'où $1,5 \leqslant a_{n+1} \leqslant 2$, montrant l'hérédité et achevant la récurrence.

↠ Exercice 2 : $1+3$

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \end{cases}$.

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant, qui prend en entrée une valeur n choisie par l'utilisateur, afin qu'il renvoie la valeur u_n.

Ligne 1	$u \leftarrow 8$
Ligne 3	**Pour** k allant de 1 à n
Ligne 4	$u \leftarrow \frac{2}{5}u + 3$
Ligne 6	**Fin Pour**

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 5$.
   On note $\mathcal{I}(n)$: « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant 5$.
   Déjà, $u_0 = 8$ et $u_1 = 6,2$, donc on a bien $u_0 \geqslant u_1 \geqslant 5$.
   On suppose $\mathcal{I}(n)$ vraie pour un entier n quelconque.
   Mais alors $\frac{2}{5}u_n + 3 \geqslant \frac{2}{5}u_{n+1} + 3 \geqslant \frac{2}{5} \times 5 + 3 = 5$,
   d'où $u_{n+1} \geqslant u_{n+2} \geqslant 5$, montrant l'hérédité et achevant la récurrence.

↠ Exercice 3 : 1,5 + 2 + 2,5 + 1 + 2

Les suites (w_n) et (v_n) sont définies par $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = -\frac{1}{2}w_n^2 + 3w_n - \frac{3}{2} \end{cases}$ et $v_n = w_n - 3$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il renvoie le plus petit entier n tel $w_n \geqslant 2,99$.

Ligne 1	$w \leftarrow 2$
Ligne 2	$n \leftarrow 0$
Ligne 3	**Tant que** $w < 2,99$
Ligne 4	$w \leftarrow -\frac{1}{2}w^2 + 3w - \frac{3}{2}$
Ligne 5	$n \leftarrow n+1$
Ligne 6	**Fin Tant que**

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
   Pour tout n, $v_{n+1} = w_{n+1} - 3 = -\frac{1}{2}w_n^2 + 3w_n - \frac{9}{2}$.
   Or, $-\frac{1}{2}v_n^2 = -\frac{1}{2}(w_n - 3))^2 = -\frac{1}{2}\left(w_n^2 - 6w_n + 9\right) = -\frac{1}{2}w_n^2 + 3w_n - \frac{9}{2}$.
   Ainsi, on a bien l'égalité voulue.

3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
   On note $\mathcal{E}(n)$: « $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
   Déjà, $v_0 = w_0 - 3 = -1$, donc on a bien $-1 \leqslant v_0 \leqslant 0$.
   On suppose $\mathcal{E}(n)$ vrai pour un entier n quelconque.
   Mais alors, par décroissance de la fonction carrée sur $]-\infty;0]$, on a $1 \geqslant v_n^2 \geqslant 0$,
   puis $-\frac{1}{2} \leqslant -\frac{1}{2}v_n^2 \leqslant 0$, et comme $-1 < \frac{1}{2}$,
   on a $-1 \leqslant v_n n + 1 \leqslant 0$, montrant l'hérédité et achevant la récurrence.

4. Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right).$$
   $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}v_n^2 - v_n = -v_n \times v_n - v_n \times 1 = -v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right)$.

5. En déduire le sens de variation de la suite (v_n) puis de la suite (w_n).
   Comme $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$, $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}v_n + 1 \leqslant \frac{1}{2}$, et donc $\frac{1}{2}v_n + 1 > 0$.
   En outre, $v_n \leqslant 0$ donc $-v_n \geqslant 0$.
   On en déduit que $-v_n\left(\frac{1}{2}v_n + 1\right) \geqslant 0$, *i.e.* $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$.
   La suite (v_n) est donc croissante.
   Comme $w_n = v_n + 3$, $w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - 3 - v_n + 3 = v_{n+1} - v_n \geqslant 0$, et donc la suite (w_n) est aussi croissante.

↠ Exercice 4 : 2,5 + 1,5

Pour deux évènements A et B, on donne $\mathbf{P}_B(A) = 0,554$; $\mathbf{P}_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 0,64$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = 0,348$.

1. Calculer $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$.
   $\mathbf{P}(B) = \frac{\mathbf{P}(A\cap B)}{\mathbf{P}_B(A)} = \frac{0,348}{0,554} = \frac{174}{277}$.
   Puis $\mathbf{P}_B\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbf{P}_B(A) = 1 - 0,554 = 0,446$,
   et donc $\mathbf{P}\left(B \cap \overline{A}\right) = \mathbf{P}_B\left(\overline{A}\right) \times \mathbf{P}(B) = 0,446 \times \frac{174}{277} = \frac{19\ 401}{69\ 250}$.
   En outre, $\mathbf{P}_{\overline{A}}(B) = 1 - \mathbf{P}_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right) = 1 - 0,64 = 0,36$.
   Mais alors $\mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = \frac{\mathbf{P}(\overline{A}\cap B)}{\mathbf{P}_{\overline{A}}(B)} = \frac{6\ 467}{8\ 310}$, et donc $\mathbf{P}(A) = 1 - \mathbf{P}\left(\overline{A}\right) = \frac{1\ 843}{8\ 310}$.
2. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
   $\mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B) = \frac{160\ 341}{1\ 150\ 935} \neq \mathbf{P}(A \cap B)$.
   Ainsi, A et B ne sont pas indépendants.

↠ Exercice 5 : 1 + 1,5 + 1,5 + 2

Dans une planète lointaine, vivent les Gamma, les Zêta et les Êta.
Les Gamma représentent 25 % de la population de la planète et les Êta 40 %. En outre, 30 % des Gamma, 65 % des Zêta et 50 % des Êta vivent dans l'hémisphère Nord de cette planète.
On définit les évènements

- G : « l'habitant est un Gamma » ;
- Z : « l'habitant est un Zêta » ;
- H : « l'habitant est un Êta » ;
- N : « l'habitant vit dans l'hémisphère Nord ».

1. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer les probabilités des évènements $G \cup Z$ et $G \cap \overline{N}$.
   $\mathbf{P}(G \cup Z) = \mathbf{P}(G) + \mathbf{P}(Z) - \mathbf{P}(G \cap Z) = 0,25 + (1 - 0,25 - 0,4) - 0 = 0,6$.
   $\mathbf{P}\left(G \cap \overline{N}\right) = 0,25 \times 0,35 = 0,175$.
3. Déterminer la probabilité qu'un habitant vive dans l'hémisphère Sud.
   $\mathbf{P}\left(\overline{N}\right) = 0,087\ 5 + 0,35 \times 0,35 + 0,4 \times 0,5 = 0,497\ 5$.
4. Passant dans l'hémisphère Nord de cette planète, quelle est la probabilité de croiser un Êta ? Cette probabilité était-elle la même si on était dans l'hémisphère Sud ?
   $\mathbf{P}_N(H) = \frac{\mathbf{P}(N\cap H)}{\mathbf{P}(N)} = \frac{0,4\times 0,5}{1-0,497\ 5} = \frac{80}{201}$
   Alors que $\mathbf{P}_{\overline{N}}(H) = \frac{\mathbf{P}(\overline{N}\cap H)}{\mathbf{P}(\overline{N})} = \frac{0,4\times 0,5}{0,497\ 5} = \frac{80}{199}$.
   Ces deux probabilités ne sont pas égales, bien que très proches.