Devoir surveillé 2

↠ Exercice 1 : Amérique du Sud, 2017

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

Partie A : un premier modèle

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite (v_n) où v_n représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016+n$. On a donc $v_0 = 12$.

1. Déterminer la nature de la suite (v_n) et donner l'expression de v_n en fonction de n.
2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

Partie B : un second modèle

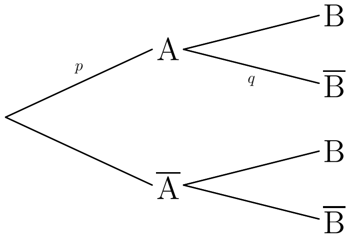
Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite (u_n) définie par $u_0 = 12$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 1,1u_n$.

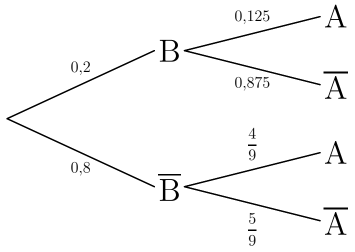
1. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\dfrac{1,1}{605}x^2 + 1,1x$.
   (a) Justifier que g est croissante sur $[0;60]$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x) = x$.
2. On remarquera que $u_{n+1} = g(u_n)$.
   (a) Calculer la valeur arrondie à 10^{-3} de u_1. Interpréter.
   (b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.
   (c) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (d) En déduire la convergence de la suite (u_n).
   (e) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.
3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
   Il utilise l'algorithme suivant : n est un entier naturel et u un nombre réel ; il renvoie la valeur finale de n.
   Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier r tel que $u_r \geqslant 50$.

```
n ← 0
u ← 12
Tant Que ...
   u ← ...
   n ← ...
Fin Tant Que
```

↠ Exercice 2

À l'aide de l'arbre de gauche, compléter l'arbre de droite. On ne justifiera que le calcul des probabilités p et q.





↠ Exercice 3

Chaque jour, Monsieur Schrödinger doit décider s'il donne de la pâté à son chat ou non (*celui-ci ayant un distributeur de croquettes, nous ne sommes pas face à un cas de maltraitance).*

- S'il a donné de la pâté à son chat un jour, la probabilité qu'il lui en donne le lendemain est de $0,3$;
- s'il ne lui a pas donné de pâté un jour, la probabilité qu'il lui en donne le lendemain est de $0,8$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on appelle A_n l'évènement « Monsieur Schrödinger donne de la pâté le n-ème jour » et on note $p_n = \mathbf{P}(\text{A}_n)$.
Au premier jour, Monsieur Schrödinger a donné de la pâté à son chat et donc $p_1 = 1$.

1. Calculer p_2 et p_3.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré sur lequel figurent les évènements A_n, $\overline{\text{A}_n}$, A_{n+1} et $\overline{\text{A}_{n+1}}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $p_{n+1} = 0,8 - 0,5p_n$.
4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $g_n = p_n - \dfrac{8}{15}$. Montrer que la suite (g_n) est géométrique.
5. Montrer que $p_n = \dfrac{7}{15}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{8}{15}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$.
6. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.