Devoir Surveillé 2

Exercice 1

La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{2}{3}v_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \end{cases}$.

1. (a) Calculer v_n pour $n \in [\![1\,;4]\!]$. On ne donnera pas les détails des calculs et on arrondira au besoin à 10^{-2} près.
   (b) Formuler une conjecture quant au sens de variation de cette suite.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{3}(n+3-v_n)$.
   (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $v_n \leqslant n+3$.
   (c) Déduire des questions précédentes une démonstration de la conjecture.
3. On note pour tout entier naturel n, $g_n = v_n - n$.
   (a) Démontrer que la suite (g_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.
   (b) Exprimer g_n en fonction de n.
   (c) En déduire que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n.$$
4. On donne l'algorithme suivant.

Entrée	n entier naturel

Traitement	Affecter à v la valeur 2
	Affecter à S la valeur 2
	Pour i allant de 1 à n
	   Affecter à v la valeur $2\left(\frac{2}{3}\right)^i + i$
	   Affecter à S la valeur $\mathrm{S}+v$
	Fin Pour

Sortie	Afficher S

Cet algorithme prend en entrée un entier n.

$v \leftarrow 2$
$\mathrm{S} \leftarrow 2$
Pour i allant de 1 à n
   $v \leftarrow 2\left(\frac{2}{3}\right)^i + i$
   $\mathrm{S} \leftarrow \mathrm{S} + v$
Fin Pour

La sortie de cet algorithme est S.

   (a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$ comme entrée.
   (b) Interpréter la sortie de cet algorithme.

Exercice 2

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$.

Un élève de tS3 prétend que l'on peut calculer pour tout entier $n \geqslant 1$ la valeur du terme u_n par la formule $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. Prouver par une démonstration par récurrence que cet élève a raison.

↠ **Exercice 3**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment. Les résultats seront données sous forme décimale et arrondies au besoin à 10^{-4} près.
Dans un pays, 2 % de la population est contaminée par un virus.

Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus dont on sait

- la probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (c'est la sensibilité du test) ;
- la probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (c'est la spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans la population de ce pays. On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T « le test est positif ».

1. (a) Réaliser un arbre pondéré résumant la situation.
   (b) En déduire la probabilité de l'événement $V \cap T$.
2. (a) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est de $0,049\,2$.
   (b) Justifier par un calcul la phrase « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de "chances" que la personne soit contaminée ».
   (c) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif. Que peut-on conclure ?

Partie B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On note X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les dix.

↠ **Exercice 4**

Une étude réalisée en 2011 par l'Institut National du sommeil et de la vigilance, sur 250 individus de 30 à 40 ans, a donné les résultats suivants.

	Femme	Homme
Prend des somnifères	8	13
Ne prend pas de somnifères	112	117

On note F l'événement « l'individu est une femme » et S « l'individu prend des somnifères ».
Ces événements sont-ils indépendants ?