# Devoir surveillé 2

## ↠ Exercice 1 : Amérique du Sud, 2017

Un biologiste souhaite étudier l'évolution de la population d'une espèce animale dans une réserve. Cette population est estimée à 12 000 individus en 2016. Les contraintes du milieu naturel font que la population ne peut pas dépasser les 60 000 individus.

**Partie A : un premier modèle**

Dans une première approche, le biologiste estime que la population croît de 5 % par an.
L'évolution annuelle de la population est ainsi modélisée par une suite $(v_n)$ où $v_n$ représente le nombre d'individus, exprimé en milliers, en $2016+n$. On a donc $v_0=12$.

1. Déterminer la nature de la suite $(v_n)$ et donner l'expression de $v_n$ en fonction de $n$.

   La suite $(v_n)$ est géométrique, de raison $1+5\ \%=1{,}05$. On a alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n=12\times 1{,}05^n$.

2. Ce modèle répond-il aux contraintes du milieu naturel ?

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$, la population dépassera les 60 000 individus et donc ne répond pas aux contraintes du modèle.

**Partie B : un second modèle**

Le biologiste modélise ensuite l'évolution annuelle de la population par une suite $(u_n)$ définie par $u_0=12$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1}=-\dfrac{1{,}1}{605}u_n^2+1{,}1u_n$.

1. On considère la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=-\dfrac{1{,}1}{605}x^2+1{,}1x$.

   (a) Justifier que $g$ est croissante sur $[0;60]$.

   La fonction $g$ est polynomiale du deuxième degré ; son coefficient dominant est strictement négatif.
   $-\dfrac{1{,}1}{2\times\left(-\frac{1{,}1}{605}\right)}=302{,}5$, la fonction $g$ est strictement croissante sur $]-\infty;302{,}5]$ et *a fortiori* sur $[0;60]$.

   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $g(x)=x$.

   $$g(x)=x\Leftrightarrow -\frac{1{,}1}{605}x^2+1{,}1x=x\Leftrightarrow -\frac{1{,}1}{605}x^2+0{,}1x=0\Leftrightarrow x\left(-\frac{1{,}1}{605}x+0{,}1\right)$$

   $$g(x)=x\Leftrightarrow\left(x=0 \text{ ou } x=\frac{-0{,}1}{-\frac{1{,}1}{605}}=55\right).$$

   $S=\{0;55\}$.

2. On remarquera que $u_{n+1}=g(u_n)$.

   (a) Calculer la valeur arrondie à $10^{-3}$ de $u_1$. Interpréter.

   $u_1=-\dfrac{1{,}1}{605}u_0^2+1{,}1u_0\approx 12{,}938$.
   En 2017, la population sera de 12 938 individus.

(b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

On pose $\mathcal{P}(n)$ : « $0 \leqslant u_n \leqslant 55$ ».

Si $n = 0$, comme $u_0 = 12$, on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 55$, et donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier $n$ quelconque.

Ainsi, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 55$.

Puis, comme la fonction $g$ est croissante sur $[0;55]$, on a $g(0) \leqslant g(u_n) \leqslant g(55)$, soit $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 55$.

$\mathcal{P}(n+1)$ étant vérifiée, l'hérédité est vraie, achevant la récurrence.

(c) Démontrer que la suite $(u_n)$ est croissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{1,1}{605}u_n^2 + 0,1u_n = u_n\left(-\dfrac{1,1}{605}u_n + 1,1\right)$.

Or $u_n \geqslant 0$ et $-\dfrac{1,1}{605}u_n + 1,1 \geqslant 0 \Leftrightarrow u_n \leqslant 55$.

Ainsi, on a bien $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ : la suite $(u_n)$ est bien croissante.

(d) En déduire la convergence de la suite $(u_n)$.

La suite $(u_n)$ est croissante et majorée, donc converge, par convergence monotone.

(e) On admet que la limite $\ell$ de la suite $(u_n)$ vérifie $g(\ell) = \ell$. En déduire sa valeur et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

D'après la question B.1.b., l'équation $g(\ell) = \ell$ admet deux solutions : 0 et 55. Comme la suite $(u_n)$ est croissante et que $u_0 > 12$, $\ell \geqslant 12$ et donc $\ell \neq 0$ : on a donc $\ell = 55$.

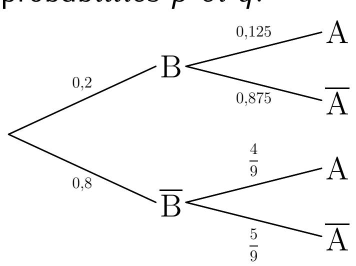
Au bout d'un grand nombre d'années, la population se stabilisera à 55 000 individus.

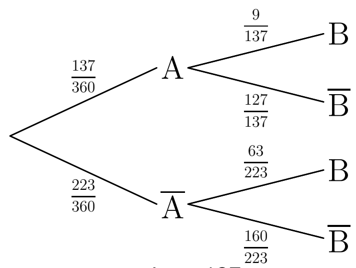
3. Le biologiste souhaite déterminer le nombre d'années au bout duquel la population dépassera les 50 000 individus avec ce second modèle.
   Il utilise l'algorithme suivant : $n$ est un entier naturel et $u$ un nombre réel ; il renvoie la valeur finale de $n$.
   Recopier et compléter cet algorithme afin qu'il affiche en sortie le plus petit entier $r$ tel que $u_r \geqslant 50$.

```
n ← 0
u ← 12
Tant Que u < 50
    u ← −(1,1/605)u² + 1,1u
    n ← n + 1
Fin Tant Que
```

## ↠ Exercice 2

À l'aide de l'arbre de gauche, compléter l'arbre de droite. On ne justifiera que le calcul des probabilités $p$ et $q$.




$p = \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}\left(A \cap \overline{B}\right) = 0,2 \times 0,125 + 0,8 \times \frac{4}{9} = \frac{137}{360}$.

$q = \mathbf{P}_A\left(\overline{B}\right) = \frac{\mathbf{P}\left(A \cap \overline{B}\right)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{0,8 \times \frac{4}{9}}{\frac{137}{360}} = \frac{128}{137}$.

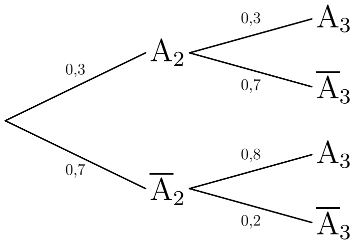
## ↠ Exercice 3

Chaque jour, Monsieur Schrödinger doit décider s'il donne de la pâté à son chat ou non (*celui-ci ayant un distributeur de croquettes, nous ne sommes pas face à un cas de maltraitance).*

- S'il a donné de la pâté à son chat un jour, la probabilité qu'il lui en donne le lendemain est de $0,3$ ;
- s'il ne lui a pas donné de pâté un jour, la probabilité qu'il lui en donne le lendemain est de $0,8$.

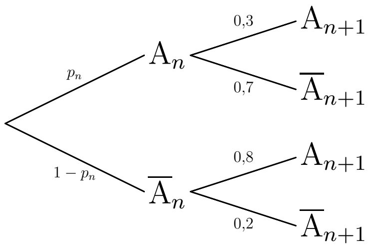
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on appelle $\mathrm{A}_n$ l'évènement « Monsieur Schrödinger donne de la pâté le $n$-ème jour » et on note $p_n = \mathbf{P}(\mathrm{A}_n)$.
Au premier jour, Monsieur Schrödinger a donné de la pâté à son chat et donc $p_1 = 1$.

1. Calculer $p_2$ et $p_3$.
   Comme $p_1 = 1$, on a $p_2 = 0,3$.




   $p_3 = 0,3 \times 0,3 + 0,7 \times 0,8 = 0,65$.

2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré sur lequel figurent les évènements $\mathrm{A}_n$, $\overline{\mathrm{A}_n}$, $\mathrm{A}_{n+1}$ et $\overline{\mathrm{A}_{n+1}}$.




3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $p_{n+1} = 0,8 - 0,5p_n$.
   $p_{n+1} = 0,3p_n + 0,8(1-p_n) = 0,8 - 0,5p_n$.

4. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $g_n = p_n - \dfrac{8}{15}$. Montrer que la suite $(g_n)$ est géométrique.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{8}{15} = 0,8 - 0,5p_n - \dfrac{8}{15} = \dfrac{4}{15} - 0,5p_n = \dfrac{4}{15} - 0,5\left(g_n + \dfrac{8}{15}\right) = \dfrac{4}{15} - 0,5g_n - \dfrac{4}{15} = -0,5g_n$.
   Ainsi, la suite $(g_n)$ est géométrique de raison $-0,5 = \dfrac{1}{2}$.

5. Montrer que $p_n = \dfrac{7}{15}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{8}{15}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$.
   Déjà, $g_1 = p_1 - \dfrac{8}{15} = \dfrac{7}{15}$
   On déduit de la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = \dfrac{7}{15} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Mais alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = g_n + \dfrac{8}{15} = \dfrac{7}{15} \times \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{8}{15}$, donnant le résultat annoncé.

6. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{8}{15}$.
   Au bout d'un grand nombre de jour, la probabilité qu'Erwan Schrödinger donne de la pâté à son chat est de $\dfrac{8}{15}$.