Devoir Surveillé 2 : correction

↠ Exercice 1

La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{2}{3}v_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \end{cases}$.

1. (a) Calculer v_n pour $n \in [\![1\,;4]\!]$. On ne donnera pas les détails des calculs et on arrondira au besoin à 10^{-2} près.

n	1	2	3	4
u_n	$2,33$	$2,89$	$3,59$	$4,40$

   (b) Formuler une conjecture quant au sens de variation de cette suite.
   Cette suite semble croissante.

2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{3}(n+3-v_n)$.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3}n + 1 - v_n = -\frac{1}{3}v_n + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{1}{3}\left(-v_n + n + \frac{1}{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}(n+3-v_n).$$

   (b) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n+3$.
   On pose $\mathcal{P}(n)$: « $v_n \leqslant n+3$ ».
   Comme $v_0 = 2$ et que $0+3=3$, on a bien $v_0 \leqslant 0+3$, montrant $\mathcal{P}(0)$.
   On suppose la propriété vraie pour un entier n quelconque.
   Ainsi, on a $v_n \leqslant n+3$.
   Puis, $\dfrac{2}{3}v_n \leqslant \dfrac{2}{3}(n+3)$
   et donc $\dfrac{2}{3}v_n + \dfrac{1}{3}n + 1 \leqslant \dfrac{2}{3}(n+3) + \dfrac{1}{3}n + 1 = n+3$,
   i.e. $v_{n+1} \leqslant n+3$.
   Or $n+3 \leqslant n+4$, donc on a bien $v_{n+1} \leqslant n+4$, montrant $\mathcal{P}(n+1)$ et achevant la récurrence.

   (c) Déduire des questions précédentes une démonstration de la conjecture.
   Pour tout n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{3}(n+3-v_n)$.
   Or pour tout n, $v_n \leqslant n+3$ et donc $0 \leqslant n+3-v_n$ et donc $0 \leqslant v_{n+1} - v_n$, ce qui prouve que la suite (v_n) est croissante.

3. On note pour tout entier naturel n, $g_n = v_n - n$.

   (a) Démontrer que la suite (g_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

   Pour tout n, $g_{n+1} = v_{n+1} - (n+1) = \dfrac{2}{3}v_n + \dfrac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \dfrac{2}{3}v_n - \dfrac{2}{3}n = \dfrac{2}{3}(v_n - n) = \dfrac{2}{3}g_n$.

   La suite (g_n) est bien géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.

(b) Exprimer g_n en fonction de n.

Comme $g_0 = v_0 - 0 = 2$, on a pour tout n, $g_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

Comme $v_n = g_n + n$, on a $v_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

4. On donne l'algorithme suivant.

Entrée	n entier naturel
Traitement	Affecter à v la valeur 2 Affecter à S la valeur 2 **Pour** i allant de 1 à n Affecter à v la valeur $2\left(\frac{2}{3}\right)^i + i$ Affecter à S la valeur S + v **Fin Pour**
Sortie	Afficher S

(a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$ comme entrée.

On trouve $10,814\,8$.

(b) Interpréter la sortie de cet algorithme.

Cette algorithme donne la valeur de $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

↠ Exercice 2

La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$.

Un élève de tS3 prétend que l'on peut calculer pour tout entier $n \geqslant 1$ la valeur du terme u_n par la formule $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Prouver par une démonstration par récurrence que cet élève a raison.

On note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = \frac{n}{n+1}$ ».

$\mathcal{P}(0)$ est vraie car $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, d'(où l'égalité attendue.

On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un entier $n \geqslant 1$ quelconque.

Ainsi, on a $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Mais alors $u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$

$u_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$.

On a donc montré $\mathcal{P}(n+1)$, ce qui achève la récurrence.

↠ Exercice 3

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment. Les résultats seront données sous forme décimale et arrondies au besoin à 10^{-4} près.

Dans un pays, 2 % de la population est contaminée par un virus.

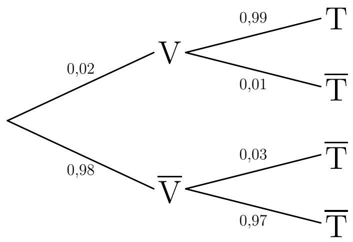
Partie A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus dont on sait

- la probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (c'est la sensibilité du test) ;
- la probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (c'est la spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans la population de ce pays. On note V l'événement « la personne est contaminée par le virus » et T « le test est positif ».

1. (a) Réaliser un arbre pondéré résumant la situation.



   (b) En déduire la probabilité de l'événement $\mathrm{V} \cap \mathrm{T}$.

   $\mathbf{P}(\mathrm{V} \cap \mathrm{T}) = 0,02 \times 0,99 = 0,019\ 8.$

2. (a) Démontrer que la probabilité que le test soit positif est de $0,049\ 2$.

   On cherche $\mathbf{P}(\mathrm{T})$.

   $\mathbf{P}(\mathrm{T}) = \mathbf{P}(\mathrm{V} \cap \mathrm{T}) + \mathbf{P}\left(\overline{\mathrm{V}} \cap \mathrm{T}\right) = 0,019\ 8 + 0,98 \times 0,03 = 0,049\ 2.$

   On retrouve le résultat annoncé.

   (b) Justifier par un calcul la phrase « Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de "chances" que la personne soit contaminée ».

   On cherche $\mathbf{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{V})$.

   $\mathbf{P}_{\mathrm{T}}(\mathrm{V}) = \dfrac{\mathbf{P}(\mathrm{T} \cap \mathrm{V})}{\mathbf{P}(\mathrm{T})} = \dfrac{0,019\ 8}{0,049\ 2} \approx 0,402\ 4.$

   En effet, parmi les patients ayant un test positif, seulement environ 40 % sont malades (c'est le paradoxe de Bayes, dû ici à la faible proportion de malades dans la population).

   (c) Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif. Interpréter cette valeur.

   On cherche $\mathbf{P}\overline{\mathrm{T}}\left(\overline{\mathrm{V}}\right) = \dfrac{\mathbf{P}(\left(\overline{\mathrm{T}} \cap \overline{\mathrm{V}}\right)}{\mathbf{P}\left(\overline{\mathrm{T}}\right)} = \dfrac{0,98 \times 0,97}{1 - 0,049\ 2} \approx 0,999\ 8.$

   On en déduit que parmi les personnes ayant un test négatif, environ 99,98 % sont effectivement non atteints par le virus.

Partie B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.

On note X la variable aléatoire comptant le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

   Tester une personne et observer si elle est atteinte ou non par le virus constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $0,02$ (X compte les malades). Cette épreuve est répétée de manière indépendante 10 fois.

   La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres 10 et $0,02$.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les dix.

   On cherche $\mathbf{P}(X \geqslant 2)$.

   Or $\mathbf{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbf{P}(X < 2) = 1 - \mathbf{P}(X \leqslant 1) = 1 - (\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1))$

   $\mathbf{P}(X \geqslant 2) = 1 - \left(0,98^{10} + 10 \times 0,02 \times ,98^{9}\right) \approx 0,016\,2$.

   Cette probabilité vaut environ $0,016\,2$.

Exercice 4

Une étude réalisée en 2011 par l'Institut National du sommeil et de la vigilance, sur 250 individus de 30 à 40 ans, a donné les résultats suivants.

	Femme	Homme
Prend des somnifères	8	13
Ne prend pas de somnifères	112	117

On note F l'événement « l'individu est une femme » et S « l'individu prend des somnifères ». Ces événements sont-ils indépendants ?

$\mathbf{P}(F) = \dfrac{8 + 112}{250} = 0,48$.

$\mathbf{P}(S) = \dfrac{8 + 13}{250} = 0,084$.

$\mathbf{P}(F \cap S) = \dfrac{8}{250} = 0,032$.

Or $\mathbf{P}(F) \times \mathbf{P}(S) = 0,040\,32$, donc $\mathbf{P}(F) \times \mathbf{P}(S) \neq \mathbf{P}(F \cap S)$: les événements F et S ne sont pas indépendants.