Devoir surveillé 3

↠ Exercice 1

1. Montrer que pour un nombre complexe Z, $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \overline{Z}$.
2. Montrer que pour tous nombres complexes z et z', on a

$$\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}.$$

3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes $z \neq \mathrm{i}$ tels que $Z = \dfrac{z-2}{1+\mathrm{i}}$ soit un nombre réel.

   $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Z = \overline{Z} \Leftrightarrow \dfrac{z-2}{1+\mathrm{i}} = \dfrac{\overline{z}-2}{1-\mathrm{i}} \Leftrightarrow (z-2)(1-\mathrm{i}) = (\overline{z}-2)(1+\mathrm{i})$
   $\Leftrightarrow (1-\mathrm{i})z - 2 + 2\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})\overline{z} - 2 - 2\mathrm{i}$
   On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec $(x\,;y) \in \mathbb{R}2$.
   $\Leftrightarrow (1-\mathrm{i})(x+\mathrm{i}\,y) + 4\mathrm{i} = (1+\mathrm{i})(x-\mathrm{i}\,y) \Leftrightarrow x+y+\mathrm{i}(-x+y+4) = x+y+\mathrm{i}(x-y) \Leftrightarrow -x+y+4 = x-y \Leftrightarrow -x+y+2 = 0$
   On reconnaît la droite de vecteur directeur $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et passant par le point de coordonnées $(2\,;0)$.

↠ Exercice 2

Dans le plan complexe, $A(2+\mathrm{i})$, $B(1+5\mathrm{i})$ et $D(5)$ sont trois points.

1. Calculer l'affixe du point C tel que ABCD soit un parallélogramme.
   On note c l'affixe du point C. ABCD est un parallélogramme
   Si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1+5\mathrm{i}) - (2+\mathrm{i}) = c - 5 \Leftrightarrow c = 4 + 4\mathrm{i}$.
2. Les points E et F sont définis par $\overrightarrow{BE} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$.
   Calculer les affixes des points E et F.
   On note e et f les affixes des points E et F.
   $e - (1+5\mathrm{i}) = -\frac{1}{2}(2+\mathrm{i}-(1+5\mathrm{i})) = -\frac{1}{2} + 2\mathrm{i}$, d'où $e = \frac{1}{2} + 7\mathrm{i}$.
   $f - (2+\mathrm{i}) = 3(5-(2+\mathrm{i})) = 9 - 3\mathrm{i}$, d'où $f = 11 - 2\mathrm{i}$.
3. Les points C, E et F sont-ils alignés ?
   On calcule les affixe des vecteurs $\overrightarrow{CE}\,(z_1)$ et $\overrightarrow{CF}\,(z_2)$.
   $z_1 = e - c = -3{,}5 + 3\mathrm{i}$ et $z_2 = 4 - 6\mathrm{i}$, et on remarque que $-2z_1 = z_2$, soit $-2\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CF}$.
   Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont colinéaires, et donc les points C, E et F sont alignés.

↠ Exercice 3

Pour un point M d'affixe $z \neq 4$, on associe le point M′ d'affixe $z' = \dfrac{z}{z-4}$.

Déterminer l'ensemble des points M tels que z' soit un imaginaire pur.

On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

$z' = \dfrac{x+\mathrm{i}\,y}{x-4+\mathrm{i}\,y} = \dfrac{(x+\mathrm{i}\,y)[(x-4)-\mathrm{i}\,y]}{[(x-4)+\mathrm{i}\,y][(x-4)-\mathrm{i}\,y]} = \dfrac{x^2-4x+y^2+\mathrm{i}(-4y)}{(x-4)^2+y^2}$.

$z' \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathfrak{Re}(z') = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-4x+y^2}{(x-4)^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow x^2-4x+y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2+y^2 = 4$.

Ainsi, z' est un imaginaire pur si et seulement si le point M appartient au cercle de centre $(2;0)$ et de rayon 2.

↠ Exercice 4

1. Résoudre l'équation $z + 2\mathrm{i}\,\overline{z} = 1 - \mathrm{i}$.

   On pose $z = x + \mathrm{i}\,y$ avec $(x\,;y) \in \mathbb{R}^2$.

   $x + \mathrm{i}\,y + 2\mathrm{i}(x - \mathrm{i}\,y) = 1 - \mathrm{i}\,y \Leftrightarrow (x+2y) + \mathrm{i}(2x+y) = 1 - \mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y = 1 \\ 2x+y = -1 \end{cases}$

   $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-2y \\ 4-3y = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow z = 1 - \mathrm{i}$.

   $\mathrm{S} = \{1 - \mathrm{i}\}$.

2. (a) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}, 2z^4 - 14z^3 + 35z^2 - 38z + 30 = \left(z^2 - 6z + 10\right)\left(2z^2 - 2z + 3\right)$.

   $\forall z \in \mathbb{C}, \left(z^2 - 6z + 10\right)\left(2z^2 - 2z + 3\right)$

   $= 2z^4 - 4z^3 + 3z^2 - 12z^2 + 12z - 18z + 20z^2 - 20z + 30 = 2z^4 - 14z^3 + 35z^2 - 38z + 30$.

   (b) Résoudre l'équation $2z^4 - 14z^3 + 35z^2 - 38z + 30 = 0$.

   $2z^4 - 14z^3 + 35z^2 - 38z + 30 = 0 \Leftrightarrow \left(z^2 - 6z + 10\right)\left(2z^2 - 2z + 3\right)$

   $\Leftrightarrow \left(z^2 - 6z + 10 = 0 \text{ ou } 2z^2 - 2z + 3 = 0\right)$

   Les discriminants valent $-6)^2 - \times 1 \times 10 = -4$ et $(-2)^2 - 4 \times 2 \times 3 = -20$,

   $z_1 = \dfrac{6-2\mathrm{i}}{2} = 3 - \mathrm{i}$, $z_2 = 3 + \mathrm{i}$, $z_3 = \dfrac{2-\mathrm{i}\sqrt{20}}{4} = \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{5}}{2}$, $z_4 = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{5}}{2}$.

   $\mathrm{S} = \left\{3 - \mathrm{i}; 3 + \mathrm{i}; \dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{5}}{2}; \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{5}}{2}\right\}$.