Devoir surveillé 4

Exercice 1

La fonction f est définie par $f(x)=\dfrac{2x^3+x-1}{x-3}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, noté $\mathscr{D}$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
   (c) Donner $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. (a) Justifier que pour $x\in\mathscr{D}$, $f'(x)=\dfrac{2p(x)}{(x-3)^2}$, où $p(x)=2x^3-9x^2-1$.
   (b) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
3. (a) Étudier les variations de la fonction p sur $\mathbb{R}$.
   (b) Prouver que l'équation $p(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée β.
   (c) Donner un encadrement à 10^{-2} près de β.
   (d) Donner le tableau de signes de la fonction p.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f. On donnera au besoin des valeurs approchées à 10^{-2} des images.

Exercice 2

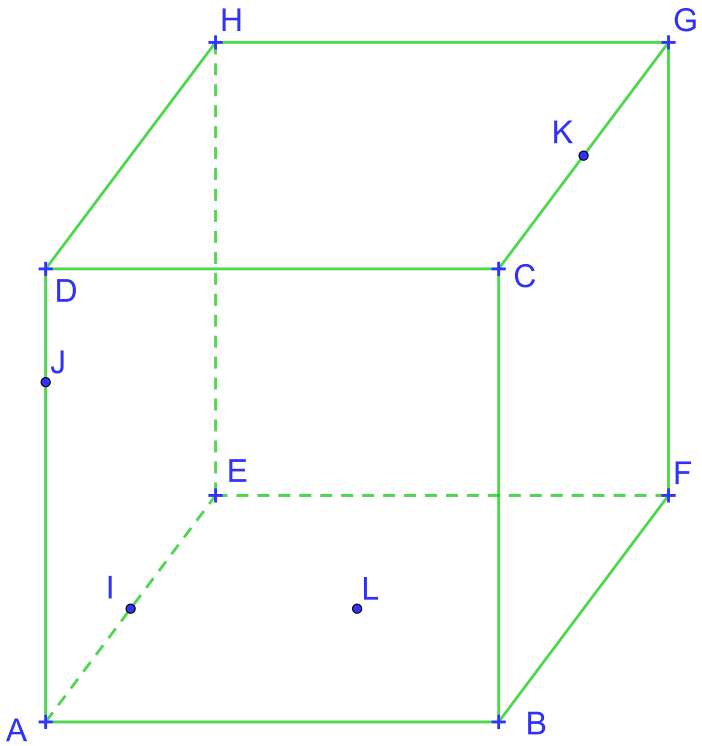
La figure ci-contre, représente un cube ABCDEFGH. Les points I, J et K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AE] ;
- J est tel que $\overrightarrow{AJ}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$;
- K est le milieu du segment [CG].

1. Construire la section du plan (IJK) avec le cube ABCDEFGH. On présentera le protocole.
2. On note L le centre de la face [ABFE]. Prouver que la droite (BE) est perpendiculaire avec le plan (DGL).

Exercice 3

1. (a) On note $q(x)=\dfrac{x^3}{1-x}$ pour $0<x<1$. Déterminer $q'(x)$.
   (b) On note $r(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$ pour $0<x<1$. Déterminer $r'(x)$.
   (c) Étudier les variations de q sur $]0\,;1[$, et en déduire celles de r.
2. On note $e(x)=\left(x^3-\sqrt{x}+2\right)^9$. Déterminer $e'(x)$.


H
G
K
D
C
J
E
F
I
L
A
B