Devoir surveillé 4

Exercice 1

La fonction f est définie par $f(x) = \dfrac{2x^3 + x - 1}{x - 3}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, noté $\mathscr{D}$.

   $f(x)$ est défini si $x - 3 \neq 0$, ainsi $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   $\lim\limits_{x\to 3} 2x^3 + x - 1 = 56$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} x + 3 = 0^+$, donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = +\infty$.

   Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^2 \dfrac{2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{3}{x}}$.

   $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{3}{x} = 1$, donc par produit et quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   (c) Donner $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2. (a) Justifier que pour $x \in \mathscr{D}$, $f'(x) = \dfrac{2p(x)}{(x-3)^2}$, où $p(x) = 2x^3 - 9x^2 - 1$.

   Pour $x \in \mathscr{D}$, $f'(x) = \dfrac{\left(6x^2 + 1\right)(x-3) - \left(2x^3 + x - 1\right) \times 1}{(x-3)^2} = \dfrac{4x^3 - 18x^2 - 2}{(x-3)^2} = \dfrac{2p(x)}{(x-3)^2}$.

   (b) Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

   $f(2) = -17$ et $f'(2) = -42$, une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 2 est

   $y = -42(x-2) + (-17)$, soit $y = -42x + 67$.

3. (a) Étudier les variations de la fonction p sur $\mathbb{R}$.

   La fonction p est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $p'(x) = 6x^2 - 18x = 6x(x-3)$.

   La fonction p' est donc strictement négative sur $]0\,;3[$ et positive sur $]-\infty\,;0[\cup]3\,;+\infty[$.

   Par suite, la fonction p est strictement décroissante sur $]0\,;3[$ et strictement croissante sur $]-\infty\,;0[$ et sur $]3\,;+\infty[$.

   (b) Prouver que l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée β.

   Sur $]-\infty\,;3]$, p admet un maximum valant $p(0) = -1$, $p(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur cet intervalle.

   sur $[3\,;+\infty[$, la fonction p est continue et strictement croissante, et comme $p(3) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) > 0$, $p(x) = 0$ admet une unique solution sur cet intervalle, et on la note β.

   (c) Donner un encadrement à 10^{-2} près de β.

   $\beta \in]4,52\,;4,53[$.

   (d) Donner le tableau de signes de la fonction p.

x	$-\infty$		β		$+\infty$
Signe de $p(x)$		$-$	0	$+$	

4. Dresser le tableau de variations de la fonction f. On donnera au besoin des valeurs approchées à 10^{-2} des images.
   La fonction f' a le même signe que la fonction p car $(x-3)^2 > 0$ pour $x \neq 3$.

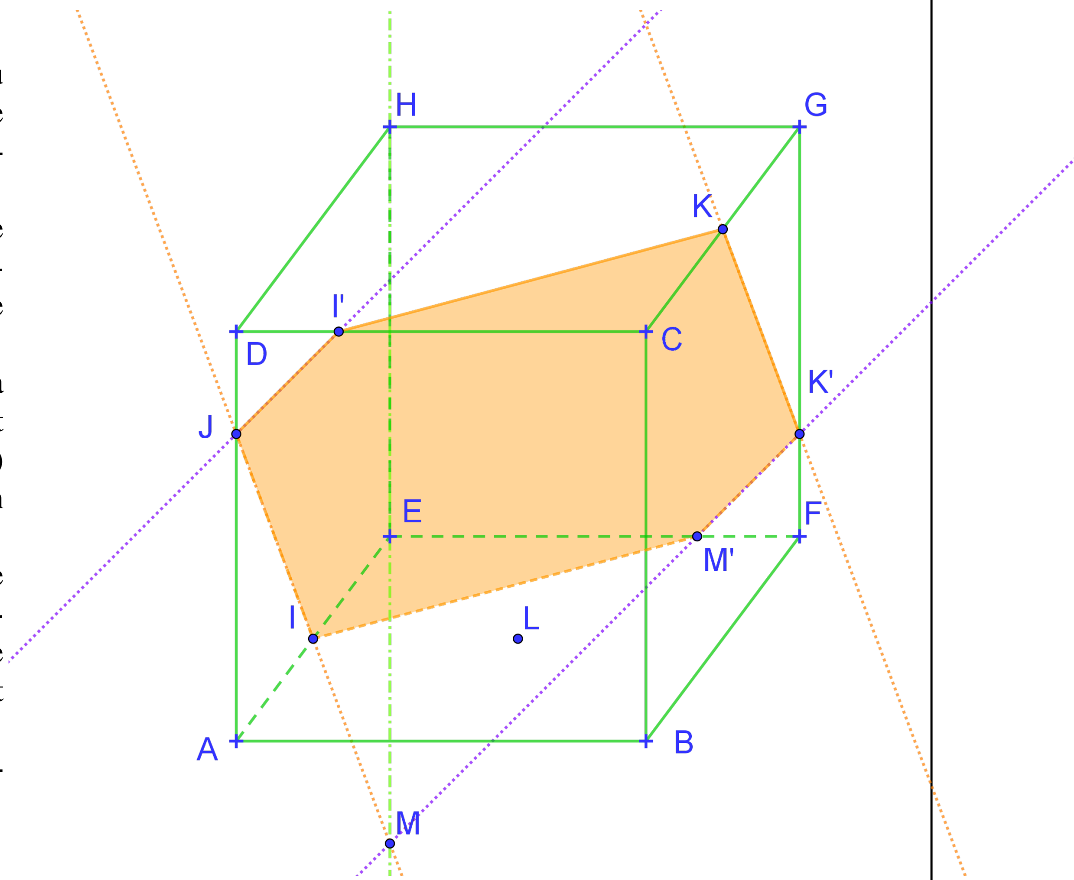
x	$-\infty$		3		β		$+\infty$
Variations de f	$+\infty$	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$f(\beta) \approx 123,82$	↗	$+\infty$

Exercice 2

La figure ci-contre, représente un cube ABCDEFGH. Les points I, J et K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AE] ;
- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$;
- K est le milieu du segment [CG].

1. Construire la section du plan (IJK) avec le cube ABCDEFGH. On présentera le protocole.
   On construit la parallèle à la droite (IJ) en passant par K : elle coupe l'arête [FG] en K′.
   La droite (IJ) coupe la droite (EH) en un point M et la droite (MK′) coupe l'arête [EF] en M′.
   On construit la parallèle à la droite (M′K′) passant par J, elle coupe l'arête [CD] en un point I′.
   La section est l'hexagone I′KK′M′IJ.



2. On note L le centre de la face [ABFE]. Prouver que la droite (BE) est perpendiculaire avec le plan (DGL).
   Les points A et F appartiennent au plan (DGL).
   Les droites (BE) et (AF) sont perpendiculaires (diagonales du carré ABFE).

Les droites (BE) et (EH) sont perpendiculaires (diagonales du rectangle EBCH), et comme les droites (EH) et (AD) sont parallèles, les droites (BE) et (AD) sont orthogonales.

Ainsi, la droite (BE) est orthogonale aux droites (AD) et (AF) qui sont incluses dans le plan (DGL) et sécantes (en A). La droite (BE) est donc perpendiculaire au plan (DGL) (en L).

↠ Exercice 3

1. (a) On note $q(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$ pour $0 < x < 1$. Déterminer $q'(x)$.

$$q'(x) = \frac{3x^2(1-x) - x^3 \times (-1)}{(1-x)^2} = \frac{3x^2 + 2x^2}{(1-x)^2} = \frac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2}.$$

(b) On note $r(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}$ pour $0 < x < 1$. Déterminer $r'(x)$.

$$r'(x) = \frac{q'(x)}{2\sqrt{q(x)}} = \frac{\frac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}} = \frac{x^2(-3-2x)\sqrt{1-x}}{2\sqrt{x^3}(1-x)^2} = \frac{x^2(-3-2x)\sqrt{1-x}}{2x\sqrt{x}(1-x)\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}$$

$$r'(x) = \frac{x(-3-2x)}{2\sqrt{x(1-x)}(1-x)}.$$

N.B. : $\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \times x} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{x} = x\sqrt{x}$ (car $x > 0$).

(c) Étudier les variations de q sur $]0\,;1[$, et en déduire celles de r.

2. On note $e(x) = \left(x^3 - \sqrt{x} + 2\right)^9$. Déterminer $e'(x)$.

$$e'(x) = 9\left(3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\left(x^3 - \sqrt{x} + 2\right)^8 = 9\left(\frac{6x^2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}}\right)\left(x^3 - \sqrt{x} + 2\right)^8.$$