Devoir surveillé 5

↠ Exercice 1

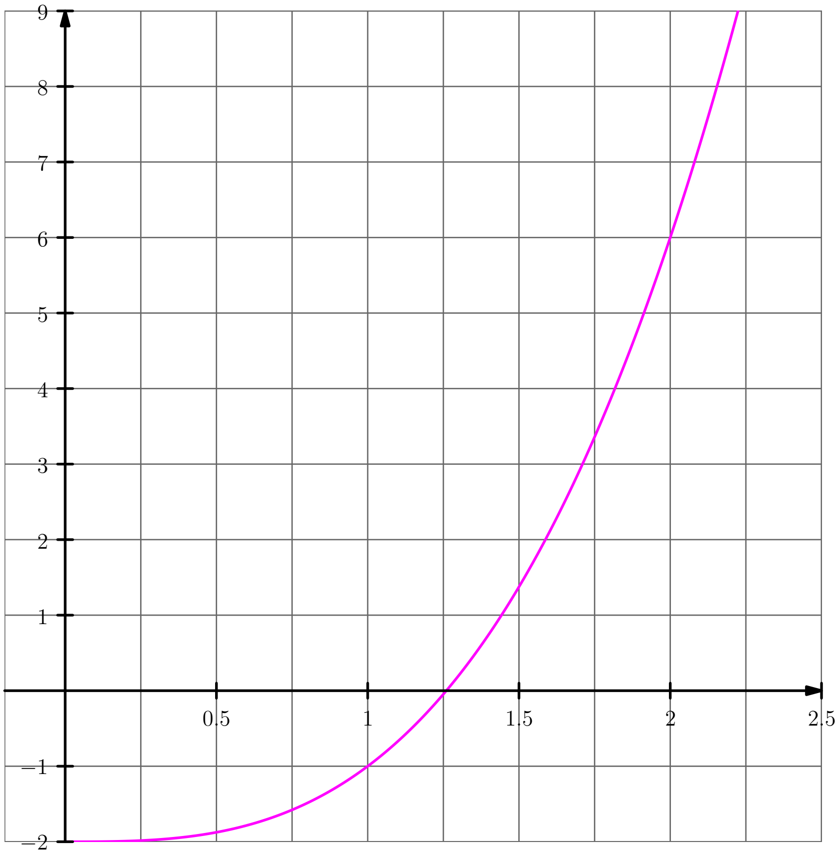
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2$, de courbe représentative $\mathscr{C}$.

ANNEXE

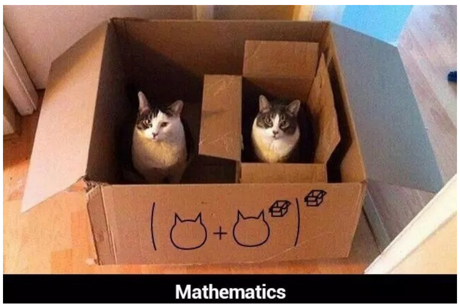
1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution γ sur $\mathbb{R}$ et que $\gamma \in [1\,;2]$.

2. On construit une suite (x_n) de la façon suivante : $x_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse x_n.

   Construire les nombres réels $x_0\,;x_1\,;x_2$ sur l'axe des abscisses à main levée. Émettre des conjectures sur la suite (x_n).



3. t est un nombre réel compris entre 1 et 2.
   (a) Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a en fonction de a ; $f(a)$ et $f'(a)$.
   (b) Justifier que cette tangente coupe l'axe des abscisses en $x = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$.
   (c) On note $g(t) = t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$. Justifier que $g(\gamma) = \gamma$.
   (d) Montrer que, sur $[\gamma\,;2]$, $g(t) = \dfrac{2}{3}t + \dfrac{2}{3t^2}$,
   puis que $g'(t) = \dfrac{2f(t)}{3t^3}$.
   En déduire que la fonction g est croissante sur $[\gamma\,;2]$.
   (e) En déduire que si $\gamma \leqslant t \leqslant 2$, alors $\gamma \leqslant g(t) \leqslant 2$.



4. (a) Avec $x_0 = 2$, on pose $x_{n+1} = g(x_n)$. Ainsi, $x_1 = g(x_0) = 1,5$.
   Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \leqslant 2$.
   (b) En déduire que la suite (x_n) converge.
   (c) La suite (x_n) converge vers un nombre réel ℓ tel que $g(\ell) = \ell$. Identifier ℓ.

La valeur γ est appelée **racine cubique de** 2 est est notée $\sqrt[3]{2}$.
La suite (x_n) correspond à l'exécution d'un algorithme, appelée algorithme de Newton : il détermine une valeur approchée de la solution d'une équation de la forme $f(x) = 0$, avec x appartenant à un intervalle où f' ne s'annule pas.