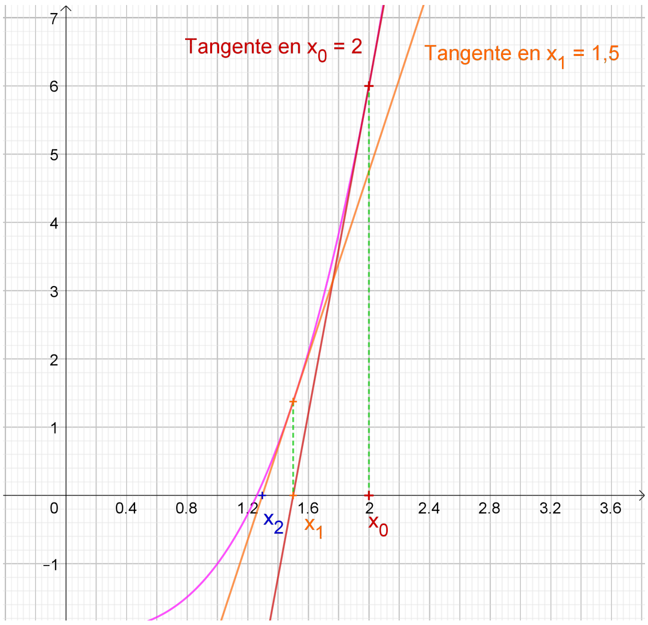
Devoir surveillé 5

Exercice 1

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2$, de courbe représentative $\mathscr{C}$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution γ sur $\mathbb{R}$ et que $\gamma \in [1\,;2]$.
   f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$. Comme f' ne s'annule qu'en 0, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   En outre, $f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 6 > 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
2. On construit une suite (x_n) de la façon suivante : $x_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$, x_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse x_n.
   Construire les nombres réels x_0 ; x_1 ; x_2 sur l'axe des abscisses à main levée. Émettre des conjectures sur la suite (x_n).

ANNEXE



3. t est un nombre réel compris entre 1 et 2.
   (a) Donner une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a en fonction de a ; $f(a)$ et $f'(a)$.
   Une équation est $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$.
   (b) Justifier que cette tangente coupe l'axe des abscisses en $x = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$.
   La tangente coupe l'axe des abscisses en un point de coordonnées $(x\,;0)$.
   Ainsi, $0 = f'(a) \times (x - a) + f(a) \Leftrightarrow x - a = -\frac{f(a)}{f'(a)} \Leftrightarrow x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$.
   (c) On note $g(t) = t - \dfrac{f(t)}{f'(t)}$. Justifier que $g(\gamma) = \gamma$.
   $g(\gamma) = \gamma - \frac{f(\gamma)}{f'(\gamma)} = \gamma$ car $f(\gamma) = 0$.
   (d) Montrer que, sur $[\gamma\,;2]$, $g(t) = \dfrac{2}{3}t + \dfrac{2}{3t^2}$,

puis que $g'(t) = \dfrac{2f(t)}{3t^3}$.

En déduire que la fonction g est croissante sur $[\gamma\,;2]$.

$g(t) = t - \frac{t^3-2}{3t^2} = t - \frac{t^3}{3t^2} + \frac{2}{3t^2} = t - \frac{t}{3} + \frac{2}{3t^2} = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3t^2} = \frac{2}{3}t + \frac{2}{3}t^{-2}$.

g est dérivable sur $[\gamma\,;2]$ et $g'(t) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-2t^3\right) = \frac{2}{3} - \frac{4}{3t^3} = \frac{2t^3-4}{3t^2} = \frac{2(t^3-2)}{3t^2} = \frac{2f(t)}{3t^2}$.

On remarque que pour $t \in [\gamma\,;2]$, $g'(t) > 0$ et donc g est croissante sur cet intervalle.

(e) En déduire que si $\gamma \leqslant t \leqslant 2$, alors $\gamma \leqslant g(t) \leqslant 2$.

Du fait de la croissance de la fonction g sur cet intervalle, on a bien

$\gamma \leqslant t \leqslant 2 \Rightarrow \gamma \leqslant g(t) \leqslant 2$.

4. (a) Avec $x_0 = 2$, on pose $x_{n+1} = g(x_n)$. Ainsi, $x_1 = g(x_0) = 1,5$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \leqslant 2$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}$: $\mathcal{S}(n)$: « $\gamma \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \leqslant 2$ ».

Déjà, si $n = 0$, on a bien $\gamma \leqslant x_1 \leqslant x_0 \leqslant 2$ car $x_0 = 2$ et $x_1 = 1,5$.

On suppose $\mathcal{S}(n)$ vrai pour un entier n quelconque.

On a donc $\gamma \leqslant x_{n+1} \leqslant x_n \leqslant 2$.

Mais alors, par croissance de la fonction g sur $[\gamma\,;2]$, on a

$g(\gamma) \leqslant g(x_{n+1}) \leqslant g(x_n) \leqslant g(2)$, *i.e.*

$\gamma \leqslant x_{n+2} \leqslant x_{n+1} \leqslant 1,5$ vu que $g(\gamma) = \gamma$, $g(x_{n+1}) = x_{n+2}$ et $g(x_n) = x_{n+1}$.

Enfin, comme $1,5 \leqslant 2$, on a $\gamma \leqslant x_{n+2} \leqslant x_{n+1} \leqslant 2$,

montrant l'hérédité, et achevant la récurrence.

(b) En déduire que la suite (x_n) converge.

La suite (x_n) est croissante et majorée, donc converge par croissance monotone.

(c) La suite (x_n) converge vers un nombre réel ℓ tel que $g(\ell) = \ell$. Identifier ℓ.

On a vu que $g(\gamma) = \gamma$ et la suite est minorée par γ, donc $\ell = \gamma$.