Devoir Surveillé 1

↠ Exercice 1

Les affirmations suivantes sont-elles exactes ? Justifier (on formalisera une démonstration si l'affirmation est vraie, on exhibera un contre-exemple si l'affirmation est fausse).

1. Le produit de deux diviseurs d'un même nombre est encore un diviseur de ce nombre.
2. Pour deux entiers a et b avec $b \neq 0$, il existe un unique entier q et un unique entier r tels que $a = bq + r$.
3. Pour deux entiers n et p, si np est pair, alors $n + p$ est pair.
4. Le reste de la division euclidienne de $2\,013 \times 2\,014 \times 2\,015$ par 7 vaut 1.
5. Si a divise bc, alors a divise b ou a divise c.
6. Si n est un multiple de 12, alors $n \equiv 1 \pmod{11}$.
7. Si le reste de la division euclidienne de p par 5 vaut 4, alors $5^p \equiv 9 \pmod{11}$.

↠ Exercice 2

La différence de deux entiers naturels est égale à 399. Lorsqu'on divise l'un par l'autre, le quotient est 15 et le reste 21.
Quels sont ces deux entiers ?

↠ Exercice 3

Montrer que $n\left(n^2 + 5\right)$ est pair en raisonnant par disjonction de cas.

↠ Exercice 4

1. Pour un entier naturel a, déterminer les restes possibles de la division euclidienne de a^2 par 7.
2. Pour un entier naturel b, déterminer les restes possibles de la division euclidienne de b^3 par 6.
3. (a) Déterminer le reste de la division euclidienne de 5^3 par 31. Compléter alors la congruence $5^3 \equiv r \pmod{31}$, où $r \in [\![0\,;6]\!]$.
   (b) En déduire le reste de la division euclidienne de $5^{37\,036}$ par 31.

↠ Exercice 5

1. Dresser la liste des diviseurs de 150.
2. Déterminer l'entier tel que la somme $n + (n+1) + \cdots + 2n$ divise 225.

   Coup de pouce : on pourra montrer que $n + (n+1) + \cdots + 2n = \dfrac{3n(n+1)}{2}$.

   N.B. : la démonstration du coup de pouce est attendue, mais on peut bien sûr se servir du coup de pouce sans l'avoir démontré.