Devoir Surveillé 3 : correction

Exercice 1

Les entiers naturels 1, 11, 111, 1 111, …sont des rep-units. On appelle ainsi les entiers naturels ne s'écrivant qu'avec des 1.
Pour tout entier naturel p non nul, on note N_p le rep-unit s'écrivant avec p fois le chiffre 1 :

$$\mathrm{N}_p = \underbrace{11\dots1}_{\substack{p \text{ répétitions} \\ \text{du chiffre } 1}} = \sum_{k=0}^{k=p-1} 10^k.$$

Dans tout l'exercice, p désigne un entier naturel non nul.
L'objet de cet exercice est d'étudier quelques propriétés des rep-units.
Partie A : divisibilité des rep-units dans quelques cas particuliers

1. Montrer que N_p n'est divisible ni par 2 ni par 5.
   Le chiffre des unités valant 1, ce nombre n'est pas divisible par 2 (il aurait fallu que le chiffre des unités soit pair) ni par 5 (il aurait fallu que le chiffre des unités soit 0 ou 5).
2. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 3.
   (a) Prouver que, pour tout entier naturel j, $10^j \equiv 1 \pmod 3$.
   Déjà, $10^0 = 1 \equiv 1 \pmod 3$ et $10 = 3\times3+1 \equiv 1 \pmod 3$.
   Mais alors, $10^j \equiv 1^j \pmod 3$, et donc on a bien $10^j \equiv 1 \pmod 3$.
   (b) En déduire que $\mathrm{N}_p \equiv p \pmod 3$.
   $$\mathrm{N}_p = \sum_{k=0}^{p-1} 10^k \equiv \sum_{k=0}^{p-1} 10^k \pmod 3,$$
   d'où $\mathrm{N}_p \equiv \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} 1 \pmod 3$, et ainsi $\mathrm{N}_p \equiv p \pmod 3$.
   (c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le rep-unit N_p soit divisible par 3.
   N_p est divisible par 3 si et seulement si $\mathrm{N}_p \equiv 0 \pmod 3$
   si et seulement si $p \equiv 0 \pmod 3$ si et seulement si p est divisible par 3.
3. Dans cette question, on étudie la divisibilité de N_p par 7.
   (a) Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous, où a est l'unique entier relatif appartenant à $\{-3\,;-2\,;-1\,;0\,;1\,;2\,;3\}$ tel que $10^m \equiv a \pmod 7$.
   On ne demande pas de justification.

m	0	1	2	3	4	5	6
a	1	3	2	-1	-3	-2	1

   (b) p est un entier naturel non nul.
   Montrer que $10^p \equiv 1 \pmod 7$ si et seulement si p est un multiple de 6.
   On pourra utiliser la division euclidienne de p par 6.
   On note $p = 6q + r$ où $q \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < 6$ la division euclidienne de p par 6.
   Mais alors, $10^p = \left(10^6\right)^q \times 10^r$.
   Or $10^6 \equiv 1 \pmod 7$, donc $\left(10^6\right)^q \equiv 1 \pmod 7$,
   puis $10^p \equiv 10^r \pmod 7$

Or comme $0 \leqslant r < 6$, ce n'est possible, d'après la question précédente, que si $r = 0$, *i.e.* si $p = 6q$ et donc quand p est un multiple de 6.

Réciproquement, si $p = 6q$ (*i.e.* est divisible par 6), alors
$10^p = \left(10^6\right)^q \equiv 1^q \pmod{10} \equiv 1 \pmod{10}$.
L'équivalence est démontrée.

(c) Justifier que, pour tout entier nature p non nul, $\mathrm{N}_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$.

N_p est une somme de termes de la suite géométrique de raison 10 et de premier terme $10^0 = 1$, donc $\mathrm{N}_p = \dfrac{1 - 10^p}{1 - 10} = \dfrac{1 - 10^p}{-9} = \dfrac{10^p - 1}{9}$.

(d) Démontrer que « 7 divise N_p » est équivalent à « 7 divise $9\mathrm{N}_p$ ».

Si 7 divise N_p, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $7k = \mathrm{N}_p$, et donc $7 \times 9k = 9\mathrm{N}_p$, et donc 7 divise encore $9\mathrm{N}_p$ (c'est trivial).

Réciproquement, si 7 divise $9\mathrm{N}_p$, comme 7 et 9 sont premiers entre eux, 7 divise N_p.

(e) En déduire que N_p est divisible par 7 si et seulement si p est un multiple de 6.

N_p est divisible par 7 si et seulement si 7 divise $9\mathrm{N}_p = 10^p - 1$
si et seulement si $10^p \equiv 1 \pmod{7}$ si et seulement si p est un multiple de 6.

Partie B : un rep-unit strictement supérieur à 1 n'est jamais un carré parfait

1. n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1,
   c'est-à-dire $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$.

   (a) Recopier et compléter le tableau de congruences ci-dessous.

$n \equiv \ldots \pmod{10}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 \equiv \pmod{10}$	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

   (b) En déduire qu'il existe un entier naturel m tel que :
   $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.

   Comme $n^2 \equiv 1 \pmod{10}$, d'après le tableau précédent, ce n'est possible que
   si $n \equiv 1 \pmod{10}$ ou $n \equiv 9 \pmod{10} \equiv -1 \pmod{10}$,
   soit s'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 10m + 1$ ou $n = 10m - 1$.

   (c) Conclure que $n^2 \equiv 1 \pmod{20}$.

   Si $n = 10m \pm 1$, alors $n^2 = (10m \pm 1)^2 = 100m^2 \pm 20m + 1 = 20(5m^2 \pm m) + 1$, et donc $n^2 \equiv 1 \pmod{20}$.

2. p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Quel est le reste de la division euclidienne de N_p par 20 ?

   $$\mathrm{N}_p = \sum_{k=2}^{p-1} 10^k + 11.$$

   Or $\displaystyle\sum_{k=2}^{p-1} 10^k \equiv 0 \pmod{20}$ car $k \geqslant 2$ ($10^k = 100 \times 10^{k-2}$ et $k - 2 \geqslant 0$ et $20|100$).
   Ainsi, $\mathrm{N}_p \equiv 11 \pmod{20}$.

3. En déduire que, pour p entier naturel supérieur ou égal à 2, le rep-unit N_p n'est pas le carré d'un entier.

   S'il existe n tel que $\mathrm{N}_p = n^2$, alors $n^2 \equiv 1 \pmod{20}$. Or $\mathrm{N}_p \equiv 11 \pmod{20}$.

   Comme $11 \not\equiv 1 \pmod{20}$, on aboutit à une contradiction, et donc N_p ne peut s'écrire n^2.