Exercices : Suites numériques

Exercice 1 :
$(u_n)_n$ est une suite de premier terme u_0. Quel est l'indice du troisième terme ? Celui du seizième terme ?

Exercice 2 :
u_{15} est le douzième terme d'une suite. Quel est l'indice du premier terme ?

Exercice 3 :
La suite $(u_n)_n$ est définie par la relation explicite $u_n = \frac{1}{2}n + 3$, pour tout entier naturel n.

1. Calculer les termes d'indices 2 ; 3 et 7.
2. Calculer le sixième terme.

Exercice 4 :
La suite $(u_n)_n$ est définie par $\begin{cases} v_{n+1} = 3v_n - 2, n \in \mathbb{N} \\ v_0 = 3 \end{cases}$.

1. Calculer les termes d'indices 2 ; 3 et 7.
2. Calculer le sixième terme.

Exercice 5 :
On définit la suite $(w_n)_n$ par son premier terme $w_0 = -4$ et telle qu'en multipliant un terme par 3 et en lui ajoutant 1, on obtienne le terme suivant.

1. Déterminer w_1 et w_2.
2. Donner la relation entre w_n et w_{n+1}.

Exercice 6 :
La suite $(z_n)_n$ est définie par $\begin{cases} z_{n+1} = -4z_n + 1, n \in \mathbb{N} \\ z_0 = 0 \end{cases}$.

1. Donner une relation liant z_n et z_{n-1}.
2. Donner une relation liant z_{n+2} et z_{n+1}.
3. Donner une relation liant z_{n+2} et z_n.

Exercice 7 :
La suite $(\varphi_n)_n$ est définie par $\begin{cases} \varphi_n = \varphi_{n-1}^2 + 2, n \in \mathbb{N}^\times \\ \varphi_1 = \sqrt{2} \end{cases}$.

1. Donner une relation liant φ_n et φ_{n-1}.
2. Donner une relation liant φ_{n+2} et φ_{n+1}.
3. Donner une relation liant φ_{n+2} et φ_n.

Exercice 8 :
La suite $(c_n)_n$ est définie par $\begin{cases} c_0 = 0 \\ c_{n+1} = c_n + 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Que représente cette suite ? En déduire son expression explicite.

Exercice 9 :

La suite $(p_n)_n$ est définie par $\begin{cases} p_0 = 0 \\ p_{n+1} = 2p_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Que représente cette suite ? En déduire son expression explicite.

Exercice 10 :

La suite $(\mathrm{P}_n)_n$ est définie par « P_n est le n-ème nombre premier positif », pour tout entier naturel n.
Donner P_5 et P_8.

Exercice 11 :

Les suites $(h_n)_n$ et $(i_n)_n$, définies respectivement par $\begin{cases} h_0 = \frac{2}{3} \\ h_{n+1} = 7h_n - 4, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ et $\begin{cases} i_0 = 1 \\ i_{n+1} = 3i_n^2 - 4i_n + 2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$ ont une particularité. Laquelle ? En déduire leur expression explicite.

Exercice 12 :

On dispose d'un couple de lapins enfants au mois 0.
Chaque mois, chaque couple de lapins adultes donne naissance à un couple de lapins enfants.
Les couples de lapins enfants mettent un mois à devenir adultes.
On note F_n (en l'honneur du mathématicien italien Fibonacci) le nombre de couples de lapins au mois n.

1. Donner la valeur de F_0 et de F_1.
2. Déterminer F_2, puis F_3 et F_4.
3. Donner la relation de récurrence de la suite $(\mathrm{F}_n)_n$, liant F_{n+2} à F_{n+1} et F_n.

Exercice 13 :

On pose $u_n = 2n^2 - 1$, pour tout entier naturel n, et $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = 2v_n^2 - 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Calculer les trois premiers termes de ces deux suites.

Exercice 14 :

La suite $(u_n)_n$ est définie par $u_n = n^3 - 3n^3 + 2n + 5$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0 ; u_1 et u_2.
2. Montrer que $u_n - 5 = n(n^2 - 3n + 2)$. Existe-t-il un entier $n \geqslant 3$ tel que $u_n = 5$?

Exercice 15 :

La suite $(u_n)_n$ est définie par $u_n = n^2 - 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les termes u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4.
2. Déterminer les entiers n tels que $u_n = 624$.

Exercice 16 :

Pour chacune des suites données, donner l'expression en fonction de n des termes u_{n-1} ; u_{n+1} ; u_{n+2} ; u_{2n} et u_{2n+1}.

$u_n = n^2 - 3n + 1$ $\qquad$ $u_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$ $\qquad$ $u_n = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice 17 :
On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, où f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de cette suite.
2. Représenter ces termes dans un repère $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice 18 :
Pour chacun des algorithmes suivants, déterminer s'il fonctionne grâce à l'expression explicite ou récurrente de la suite. La donner.

<u>Entrées :</u> A un nombre réel N un entier naturel <u>Traitement :</u> **Pour** I variant de 1 à N Affecter à A la valeur $5\times A-3$ **Fin Pour** Afficher A	<u>Entrée :</u> N un entier naturel <u>Traitement :</u> Affecter à A la valeur 1 **Pour** I variant de 1 à N Affecter à A la valeur $2\times A-3$ **Fin Pour** Afficher A	<u>Entrée :</u> N un entier naturel <u>Traitement :</u> A prend la valeur $5\times N-3$ Afficher A

Exercice 19 :
On définit la suite $(u_n)_n$ par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+3}{3u_n^2-1},\ n\in\mathbb{N} \end{cases}$.
Compléter les algorithmes suivants afin qu'ils calculent le terme d'indice N de cette suite.

<u>Entrées :</u>
U un nombre réel
N un entier naturel
<u>Traitement :</u>
Pour I variant de 1 à N
Affecter à U la valeur …
Fin Pour
Afficher U
	`PROGRAM:CALCULP`
	`:Input U`
	`:Input N`
	`:For(I,1,N)`
	`:... →U`
	`:End`
	`:Disp U`
		<u>Entrées :</u>
		U un nombre réel
		N un entier naturel
		<u>Traitement :</u>
		Affecter à I la valeur 1
		Tant que $I \leqslant N$
		Affecter à U la valeur …
		Affecter à I la valeur …
		Fin Tant que
		Afficher U
			`PROGRAM:CALCULTQ`
			`:Input U`
			`:Input N`
			`:1→I`
			`:While(I≤N)`
			`:... →U`
			`:... →I`
			`:End`
			`:Disp U`

Exercice 20 :
On définit les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ et $(t_n)_n$ par :

$u_n = -3n^2+4$ $\qquad v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ $\qquad \begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = w_n+2n+3 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = -t_n^2+t_n-1 \end{cases}$

1. Calculer les quantités $u_{n+1}-u_n$; $v_{n+1}-v_n$; $w_{n+1}-w_n$ et $t_{n+1}-t_n$. En étudier le signe.
2. En déduire la comparaison des termes d'indice $n+1$ et n pour chacune de ces suites.

Exercice 21 :
Pour chacune des suites suivantes, définies par leur expression explicite ou récurrente, déterminer leur sens de variation.

$a_n = -2n+1$

$\begin{cases} b_0 = 3 \\ b_{n+1} = b_n+n^2-n+3 \end{cases}$

$c_n = \frac{1}{n+1}$

$d_n = 3^n$

$f_n = \frac{1}{2^n}$

$g_n = 2n^2-n+1$

$h_n = \sum_{\ell=1}^{n}\ell^2$

$\begin{cases} k_0 = 2 \\ k_{n+1} = k_n-\sqrt{k_n^2+3} \end{cases}$

$m_n = (-1)^n$

$p_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Exercice 22 :
$(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites, et on définit la suite $(s_n)_n$ par $s_n = u_n + v_n$ et la suite $(p_n)_n$ par $p_n = u_n \times v_n$.

1. Montrer que si les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont toutes les deux croissantes, alors la suite $(s_n)_n$ l'est aussi.
2. Montrer que si la suite $(u_n)_n$ est croissante et la suite $(v_n)_n$ est décroissante, alors on ne peut rien conclure sur le sens e variations de la suite $(s_n)_n$.
3. Montrer que si les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont toutes les deux croissantes, alors on ne peut rien conclure sur le sens e variations de la suite $(p_n)_n$.

Exercice 23 :
On définit la suite $(r_n)_n$ par $r_n = \sqrt{n} + 1$.

1. Déterminer le plus petit rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $r_n \geqslant 100$.
2. Déterminer le plus petit rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $r_n \geqslant 10^8$.

Exercice 24 :
On définit la suite $(h_n)_n$ par $h_n = \dfrac{1}{n+3}$.

1. Déterminer le plus petit rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $h_n \leqslant 0,01$.
2. Déterminer le plus petit rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $h_n \leqslant 10^{-4}$.

Exercice 25 :
On définit la suite $(p_n)_n$ par $p_n = n^2 - 16n + 55$.

1. Déterminer le plus petit rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $p_n \geqslant 100$.
2. Déterminer le plus petit rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $p_n \geqslant 10^8$.

Exercice 26 :
On définit la suite $(q_n)_n$ par $q_n = \dfrac{1}{3^n}$.

1. Étudier le sens de variation de cette suite.
2. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

Exercice 27 :
On définit la suite $(u_n)_n$ par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$.

Traitement :
Affecter à U la valeur 10
Affecter à K la valeur 1
Tant que U ⩽ 100
  Affecter à U la valeur 2U − 5
  Affecter à K la valeur K + 1
Fin Tant que
Afficher K

```
PROGRAM:SEUIL
 :10→I
 :1→K
 :While U⩽100
 :2U-5→U
 :K+1→K
 :End
 :Disp K
```

1. Quelle est la sortie de cet algorithme ? L'interpréter.
2. Utiliser la calculatrice pour obtenir le plus petit entier n_0 tel que $u_n \geqslant 1\,000$.

Exercice 28 :
On définit la suite $(h_n)_n$ par $h_n = \dfrac{2n+1}{n^2+1}$. Modifier l'algorithme de l'exercice précédent afin qu'il donne le plus petit rang n_0 tel que $h_n \leqslant 0,000\,1$.