Exercices :
nombres complexes

Le plan sera muni au besoin d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 1 :
Mettre les nombres suivants sous forme algébrique.

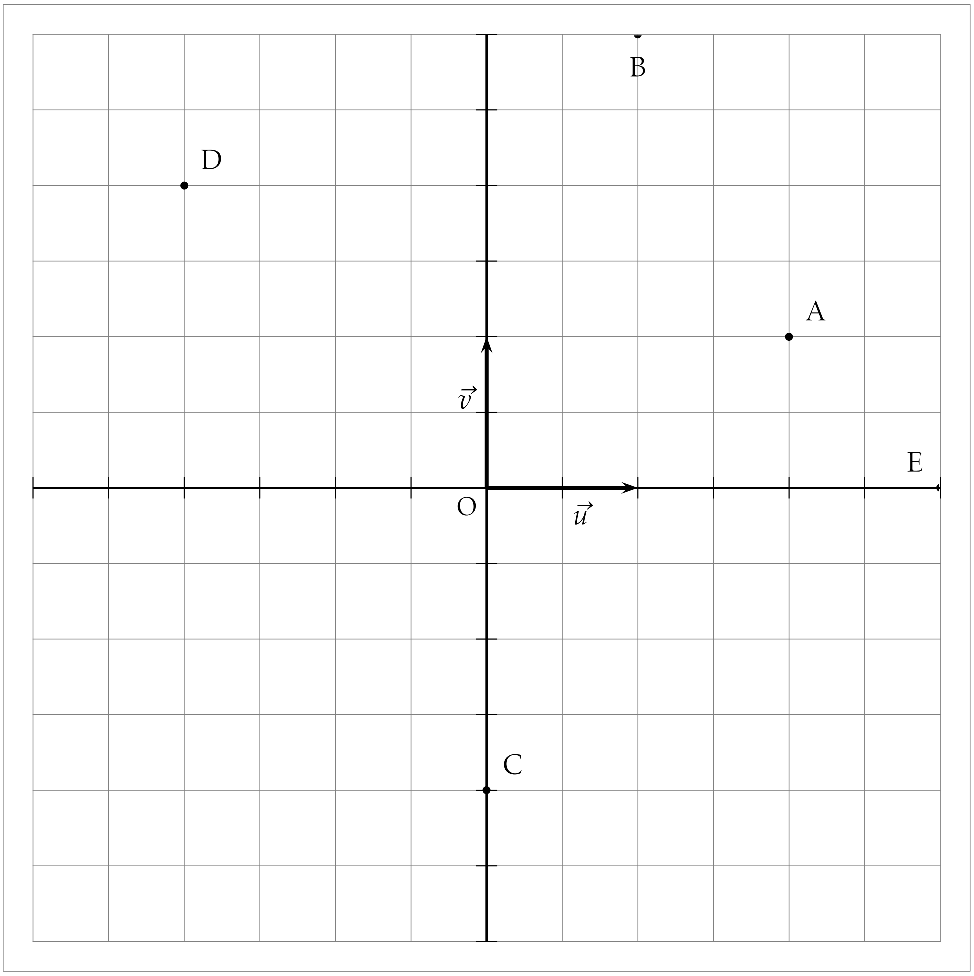
$z_1 = -4(1+2i)$
$z_2 = i(3+2i)$
$z_3 = (2+5i)(2-i)$
$z_4 = (-1+i)(5-i)$
$z_5 = \dfrac{1}{3+4i}$
$z_6 = \dfrac{-2+3i}{5-i}$
$z_7 = \dfrac{3}{\sqrt{3}+i}$
$z_8 = \dfrac{\sqrt{2}-2i}{\sqrt{2}+i}$

Exercice 2 :
Déterminer les conjugués des nombres suivants.

$z_1 = -5$
$z_2 = 3i$
$z_3 = 2i - 8$
$z_4 = 1 - 3i(1-i)$
$z_5 = \dfrac{5i}{4-i}$
$z_6 = \dfrac{1-i}{3+2i}$

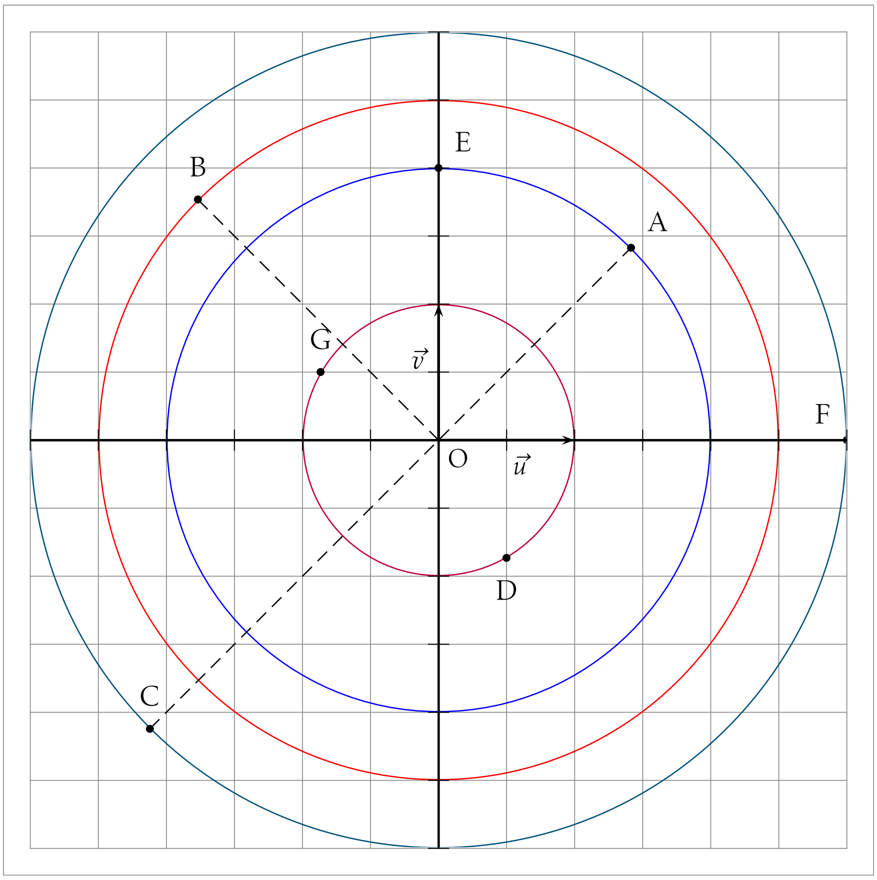
Exercice 3 :
Le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est orthonormé.

1. Par une lecture graphique, donner les affixes des points A, B, C, D et E.
2. En déduire les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. On définit les points $E(-1,5 + 2,5i)$, $F(2 - i)$, $G\left(\frac{3}{2}i\right)$ et $H\left(\frac{1}{2}(1+i)\right)$. Les placer sur le graphique.
4. Déterminer l'affixe du point P, milieu du segment [EF].
5. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $2\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{GH}$.

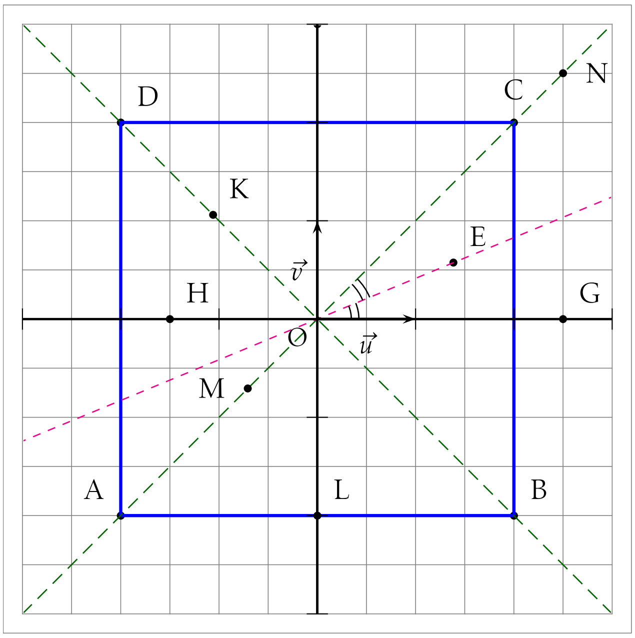


Exercice 4 :

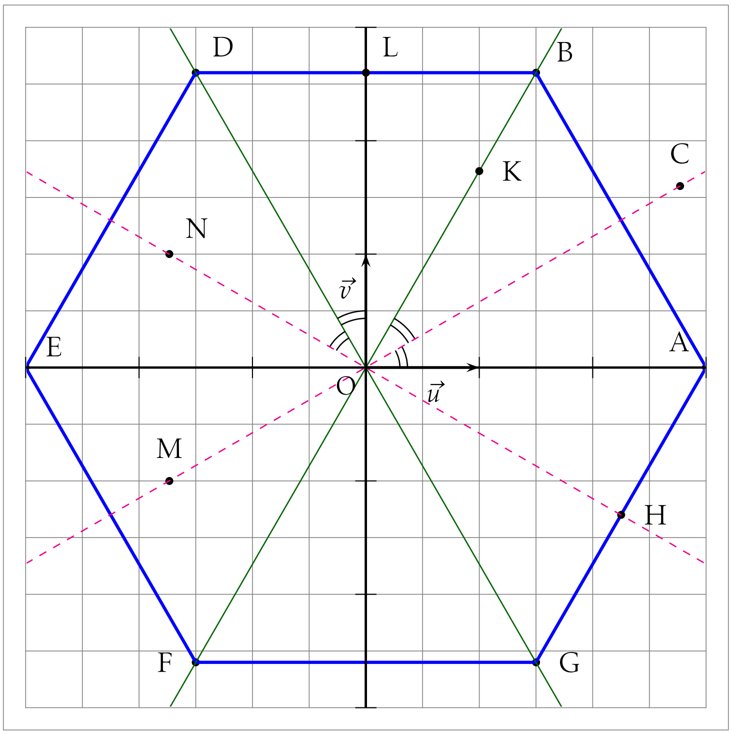
Donner par lecture graphique le module et un argument pour les affixes des points A, B, C, D, E, F, G.



Exercice 5 :
Dans chaque situation, déterminer par lecture graphique un argument de l'affixe des points A, B, C, D, E, F, G, H, K, L, M et N.



ABCD est un carré direct.



ABDEFG est un hexagone régulier direct.

Exercice 6 : *Foisonnement d'équations (de la variable) complexe*
Résoudre les équations suivantes, dont l'inconnue est un nombre complexe. On donnera la (ou les) solution(s) sous forme algébrique.

1. $2\overline{z} = \mathrm{i} - 1$
2. $(3-2\mathrm{i})\overline{z} + \mathrm{i} = 0$
3. $(2z+1-\mathrm{i})(\mathrm{i}\,\overline{z} + \mathrm{i} - 2) = 0$
4. $\dfrac{\overline{z}-1}{z+1} = \mathrm{i}$
5. $z + 2\overline{z} = 6 + \mathrm{i}$
6. $3(1+\mathrm{i})z = 1 - \mathrm{i}\,\overline{z}$
7. $2z^2 - 2z + 5 = 0$
8. $3z^2 - 5z + 3 = 0$
9. $\dfrac{z+1}{z-1} = 1 = \mathrm{i}$
10. $\dfrac{(3-2\mathrm{i})z}{z+2} = \mathrm{i} - 5$
11. $25 + z^2 + 10z = 16$
12. $z^2 + 81 - 18z = 25$
13. $2z^4 - 12z^2 + 10 = 0$
14. $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$
15. $z^6 - 3z^3 - 4 = 0$

Exercice 7 :
On considère A, B, C et D les points d'affixes respectives $-3+\mathrm{i}$; $-1-2\mathrm{i}$; 6 et $4+3\mathrm{i}$.

1. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en conclure sur la nature de quadrilatère ABCD ?
2. Déterminer l'affixe du point E tel que le quadrilatère CEBD soit un parallélogramme.
3. Que représente le point E pour le segment [AB] ?

Exercice 8 :
Montrer que les points E, F et G d'affixes respectives $1+\mathrm{i}$; $4+2\mathrm{i}$ et $-5-\mathrm{i}$ sont alignés.

Exercice 9 :
On considère les points K, L et M d'affixes respectives $3+2\mathrm{i}$; $5\mathrm{i}$ et $2-4\mathrm{i}$.

1. Déterminer l'affixe du point N tel que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{KL}$.
2. Déterminer l'affixe du point I, milieu du segment [LM].
3. Calculer l'affixe du point G tel que $\overrightarrow{KG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KI}$.

Exercice 10 :
On note z le nombre de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{4}$.

1. Déterminer la forme trigonométrique du nombre z.
2. Déterminer la forme algébrique du nombre z.
3. Reprendre l'exercice pour le nombre complexe de module 6 et d'argument $-\frac{\pi}{3}$.

Exercice 11 :
Déterminer le module, un argument puis la forme trigonométrique des nombres suivants.

$z_1 = \mathrm{i}$ $\qquad z_2 = -2$ $\qquad z_3 = 1+\mathrm{i}$ $\qquad z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\,\frac{3}{2}$

Exercice 12 :
On note z_1 le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$ et z_2 le nombre complexe de module 4 et d'argument $-\frac{\pi}{6}$.
Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants.

$z_1 z_2$ $\qquad \frac{z_2}{z_1}$ $\qquad z_2^2$ $\qquad -z_2$

$\frac{z_1}{z_2}$ $\qquad z_1^5$ $\qquad \overline{z_1}$ $\qquad \overline{z_1} z_2$

Exercice 13 :
Déterminer le conjugué des nombres suivants.

$z_1 = (2+4\mathrm{i})(-4-5\mathrm{i})$ $\qquad z_2 = 1-\mathrm{i}(2+5\mathrm{i})^3$ $\qquad z_3 = \dfrac{\mathrm{i}(1+4\mathrm{i})^2}{2-\mathrm{i}}$

Exercice 14 :
Déterminer en fonction z et $\overline{z}$ les conjugués des nombres suivants.

$Z_1 = 2+3\mathrm{i}z$ $\qquad Z_2 = \dfrac{1+\mathrm{i}z}{(3+2\mathrm{i})\overline{z}}$ $\qquad Z_3 = z^3+2\mathrm{i}z^2+1-3\mathrm{i}$

Exercice 15 :
On considère un nombre complexe z, et on note $z = x+\mathrm{i}y$ sa forme algébrique.
Dans chaque situation, écrire le nombre complexe proposé sous forme algébrique en fonction de x et y.

$Z_1 = z+z^2$ $\qquad Z_3 = \dfrac{z}{z-\mathrm{i}}$ (avec $z \neq \mathrm{i}$)

$Z_2 = \dfrac{2}{z}$ $\qquad Z_4 = \dfrac{z-1+\mathrm{i}}{z+2-\mathrm{i}}$ (avec $z \neq -2+\mathrm{i}$)

Exercice 16 :
Pour le nombre complexe $z = x+\mathrm{i}y$ écris sous forme algébrique, on définit le nombre $Z = \dfrac{z-2}{z-\mathrm{i}}$ avec $z \neq \mathrm{i}$.

1. Écrire Z sous forme algébrique.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe Z tels que
   (a) Z soit un nombre réel ;
   (b) Z soit un nombre imaginaire pur.

   Dans chaque situation, interpréter graphiquement.

Exercice 17 :
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $Z = z+1-\mathrm{i}$ tels que $Z+\overline{Z} = 0$.

Exercice 18 :
Calculer le module des nombres complexes suivants.

1. $\sqrt{2}+\mathrm{i}$ $\qquad$ 2. $1+\mathrm{i}\sqrt{2}$ $\qquad$ 3. $\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{3}$ $\qquad$ 4. $\frac{3}{2}+2\mathrm{i}$ $\qquad$ 5. $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$

Exercice 19 :
Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant la condition imposée.

1. $|z| = 3$ $\qquad$ 2. $|z-\mathrm{i}| = 5$ $\qquad$ 3. $|z-2\mathrm{i}| = |z+2-3\mathrm{i}|$ $\qquad$ 4. $|z-1+\mathrm{i}| = |z+5-3\mathrm{i}|$

5. $\arg(\overline{z}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ $\qquad$ 6. $\arg\left(z^2\right) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$ $\qquad$ 7. $\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$ $\qquad$ 8. $\arg[(1+\mathrm{i})z] \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

Exercice 20 :
On considère les points A et B d'affixes respectives $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $1-\sqrt{3}+\left(1+\sqrt{3}\right)\mathrm{i}$. Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle.

Exercice 21 :
On considère les points R, S et T d'affixes respectives $2-2\mathrm{i}\sqrt{3}$; $3+3\mathrm{i}\sqrt{3}$; 10. Montrer que le triangle RST est équilatéral.

Exercice 22 :
On considère les points E, F, G et J d'affixes respectives $-3-\mathrm{i}$; $-2+4\mathrm{i}$; $3-\mathrm{i}$ et i. Montrer que le point J est le centre du cercle circonscrit du triangle EFG

Exercice 23 :
Pour chacun des nombres complexes suivants, déterminer le module, puis un argument de chacun des nombres complexes suivants. En déduire leur forme trigonométrique puis leur forme algébrique.

1. $1+\mathrm{i}$
2. $(1+\mathrm{i})^5$
3. $\left(2-2\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^6$
4. $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^7$
5. $\left(\dfrac{\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}\right)^2$
6. $\dfrac{\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^9}{\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)^{11}}$

Exercice 24 :

1. Déterminer la forme algébrique puis une forme trigonométrique du nombre $Z=\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1+\mathrm{i}}$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 25 :

1. Déterminer la forme algébrique puis trigonométrique du nombre $Z=(1+\mathrm{i})\left(\sqrt{3}-\mathrm{i}\right)$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 26 :
On considère les points A, B et C d'affixe respective $a=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$; $b=5-2\mathrm{i}$ et $c=5+2\mathrm{i}$.

1. Déterminer la forme algébrique puis une forme trigonométrique du nombre $\dfrac{b-a}{c-a}$.
2. Interpréter géométriquement ce nombre.
3. En déduire la nature du triangle ABC.

Exercice 27 :
On considère les points G et H d'affixe respective $g=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $h=-\sqrt{3}+\mathrm{i}$.

1. Déterminer le module et un argument de chacun de ces nombres.
2. Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OG}$ et $\overrightarrow{OH}$.
3. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OG}\right)$ et $\left(\vec{u};\overrightarrow{OH}\right)$.
4. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OG};\overrightarrow{OH}\right)$.
5. Déterminer alors la nature du triangle GHO.

Exercice 28 :
On considère les points Q, R, S et T d'affixes respectives $q=5\mathrm{i}$; $r=4$; $s=-7+2\mathrm{i}$ et $t=-2-6\mathrm{i}$.

1. Déterminer la forme algébrique puis une forme trigonométrique du nombre $\dfrac{s-r}{t-q}$.
2. Interpréter géométriquement un argument de ce nombre complexe.
3. Que peut-on en déduire pour les droites (QT) et (RS) ?

Exercice 29 :
On considère les points D, E et F d'affixes respectives $2+3\mathrm{i}$; $-3+2\mathrm{i}$ et $\dfrac{9}{2}+\dfrac{7}{2}\mathrm{i}$.

Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{DE};\overrightarrow{DF}\right)$. Que peut-on déduire pour les points D, E et F ?

Exercice 30 : *Équation du quatrième degré « symétrique »*
On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 - 5z^3 + 6z^2 - 5z + 1 = 0 : \text{(E)}$$

1. Vérifier que 0 n'est pas solution de l'équation (E).
2. Montrer que l'équation (E) est équivalente au système (S) : $\begin{cases} u^2 - 5u + 4 = 0 \\ u = z + \frac{1}{z} \end{cases}$.
3. (a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $u^2 - 5u + 4 = 0$. On notera u_1 et u_2 ses solutions.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $u_1 = z + \frac{1}{z}$ et $u_2 = z + \frac{1}{z}$.
   (c) En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice 31 : *Équation du quatrième degré*
On pose $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$.

1. u désigne un nombre complexe.
   (a) Montrer que $P(\overline{u}) = \overline{P(u)}$.
   (b) En déduire que si $P(u) = 0$, alors $P(\overline{u}) = 0$.
2. (a) Calculer $P(1 + \mathrm{i})$.
   (b) En déduire une autre solution de l'équation $P(z) = 0$.
   (c) Factoriser $P(z)$, et en déduire toutes les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
   Note : si z_1 et z_2 sont deux racines de P, alors il se factorise ainsi :
   $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z^2 + az + b)$.

Exercice 32 :
Les points A, B et M ont pour affixes respectives $a = -3$; $b = 1 + \mathrm{i}$ et z.
À tout nombre complexe z, on associe le nombre complexe z' défini par $z' = \dfrac{z+3}{z-1-\mathrm{i}}$.
On note M′ le point d'affixe z'.
Déterminer l'ensemble des points M tels que :

1. $OM' = 1$;
2. M′ est sur l'axe des nombres réels ;
3. M′ est sur l'axe des nombres imaginaires purs.

Exercice 33 :
On considère A, B et C trois points du plan et on note a ; b et c leurs affixes respectives.

1. Montrer que si ABC est un triangle rectangle isocèle direct en A, alors $c = \mathrm{i}(b - a) + a$.
2. Si $a = 1 - 2\mathrm{i}$ et $b = 2 - 3\mathrm{i}$, déterminer alors c.

Exercice 34 : *Et le triangle devient un cercle*
On note A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe 1.
À tout point M d'affixe z autre que A, O et B, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

1. Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.
2. On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des points M distincts des points A, O et B tels que le triangle MNP soit rectangle en P.
   (a) En utilisant la propriété de Pythagore, démontrer que le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$.
   (b) Démontrer que $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$ équivaut à $\left(z + \dfrac{1}{2}\right)\overline{\left(z + \dfrac{1}{2}\right)} = \dfrac{1}{4}$.
   (c) En déduire la nature de l'ensemble $\mathscr{C}$ recherché.

Exercice 35 : *Une application complexe*

On fera une figure qui sera complété au fur et à mesure des questions.

On définit la fonction f : $\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) \end{array}$.

On note M le point d'affixe z et M′ le point d'affixe $z' = f(z)$.

1. On note E le point d'affixe $z_{\mathrm{E}} = -\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point E′, dont l'affixe est l'image de z_{E} par f.
2. Déterminer l'ensemble des points M tel que leur affixe z vérifie $f(z) = z$.
3. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et −1.
   (a) Montrer que pour tout nombre complexe z différent de 0 ; 1 et −1, on a :
   $$\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$
   (b) En déduire
   - une expression du rapport $\frac{\mathrm{M'B}}{\mathrm{M'A}}$ en fonction du rapport $\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MA}}$;
   - une expression d'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{M'B}} ; \overrightarrow{\mathrm{M'A}}\right)$ en fonction d'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} ; \overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)$.
4. On note Δ la médiatrice du segment [AB]. Montrer que si M est un point de Δ et d'affixe z, alors $f(z)$ est l'affixe d'un point appartenant à la droite Δ.
5. On note Γ le cercle de diamètre [AB]. Montrer que si M est un point de Γ et d'affixe z, alors $f(z)$ est l'affixe d'un point appartenant à la droite (AB).

Exercice 36 : *Suite de nombres complexes*

On considère la suite de nombres complexes définie par $\begin{cases} z_0 = 1 \\ z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{4}\right) z_n \end{cases}$.

On note A_n le point d'affixe z_n dans un repère orthonormé $(\mathrm{O} ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. (a) Écrire sous forme algébrique les nombres z_n pour $n \in [\![1;6]\!]$.
   (b) Représenter les points A_n pour $n \in [\![0;6]\!]$ dans un repère (échelle 1 unité ↔ 8 cm).
2. On pose pour tout entier naturel n, $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.
   (a) Montrer pour tout $n \geqslant 1$, $z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{4}\right)(z_n - z_{n-1})$.
   (b) En déduire une relation entre d_n et d_{n-1} pour tout $n \geqslant 1$, puis exprimer d_n en fonction de d_0 et n.
   (c) Interpréter graphiquement les nombres d_n.
3. On définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la longueur de la ligne polygonale $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ par
   $\mathrm{L}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ où $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ est la distance du segment $[\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}]$.
   Déterminer L_n en fonction de n puis la limite de la suite $(\mathrm{L}_n)_n$. Interpréter.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \arg(z_n)$.
   (a) Établir une relation entre a_n et a_{n-1} pour tout $n \geqslant 1$.
   (b) En déduire a_n en fonction de n.
   (c) Pour quelles valeurs de n les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?