EXERCICES : INTÉGRATION

↠ Exercice 1

1. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer l'aire sous la courbe entre les abscisses a et b.

   (a) $f : x \longmapsto 2x+1$; $a=3$ et $b=6$

   (b) $g : x \longmapsto -x+3$; $a=-10$ et $b=3$

   (c) $h : x \longmapsto \pi$; $a=0$ et $b=10$

2. On définit la fonction affine $f : x \longmapsto mx+p$ avec $m>0$ et $p>0$.
   Déterminer l'expression de l'aire sous la courbe entre 0 et b, avec $0<b$. Vérifier que l'aire a pour expression $\mathrm{F}(b)$ où F est l'expression d'une fonction.
   Déterminer $\mathrm{F}'(x)$. Que constate-t-on ?

↠ Exercice 2

On pose $c : x \longmapsto \sqrt{1-x^2}$.

1. Sur quel intervalle maximal peut-on définir la fonction c ?
2. Prouver que la courbe représentative de cette fonction est un demi-cercle. En déduire $\displaystyle\int_{-1}^{1} c(x)\,\mathrm{d}x$.

↠ Exercice 3

1. De quelle fonction f_i la fonction F_i est-elle une primitive sur $\mathbb{R}$?

   (a) $\mathrm{F}_1 : x \longmapsto 2x^3-4x+5$

   (b) $\mathrm{F}_2 : x \longmapsto \sqrt{3x^2+1}$

   (c) $\mathrm{F}_3 : x \longmapsto \left(-x-\frac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{-3x}$

2. Déterminer dans chaque cas, toutes les primitives de f_i sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer dans chaque cas, la primitive de f_i qui prend la valeur 1 en 0.

↠ Exercice 4

Déterminer les nombres réels a ; b et c tels que la fonction F soit une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

1. $\mathrm{F}(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{x}$; $f(x)=3x\mathrm{e}^{x}$
2. $\mathrm{F}(x)=(bx+c)\mathrm{e}^{ax}$; $f(x)=x\mathrm{e}^{2x}$
3. $\mathrm{F}(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^{-x}$; $f(x)=-x^2\mathrm{e}^{-x}$

↠ Exercice 5

Déterminer une expression d'une primitive des fonctions suivantes.

1. $a : t \longmapsto 6t^3+4t$
2. $b : x \longmapsto x^3+5x^2-2x+1$
3. $c : t \longmapsto t(t+1)^2$
4. $f : x \longmapsto 4x^2-3x+\dfrac{1}{x^2}$
5. $g : q \longmapsto 4q^3-3\mathrm{e}^{q}$
6. $h : x \longmapsto -7x^5+\dfrac{4}{x^3}$
7. $k : t \longmapsto 12t\mathrm{e}^{t^2-3}$
8. $q : x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+1}$
9. $u : z \longmapsto 11z+6z^{-3}$
10. $v : x \longmapsto \dfrac{x}{\left(x^2+4\right)^5}$
11. $w : y \longmapsto \dfrac{2y+1}{\sqrt{y^2+y+4}}$
12. $\phi : x \mapsto (x+1)\left(x^2+2x+3\right)^4$
13. $\psi : t \longmapsto \mathrm{e}^{-3t+5}$
14. $\varphi : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\sqrt{\mathrm{e}^{x}+1}}$
15. $\theta : t \longmapsto \mathrm{e}^{t}\left(\mathrm{e}^{t}+3\right)^2$
16. $\kappa : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-2x}}{\left(\mathrm{e}^{-2x}+3\right)^4}$
17. $\rho : x \longmapsto \dfrac{1}{2x}-\dfrac{x^2}{x^3+1}$

↠ Exercice 6

La vitesse d'un mobile projeté dans le plan (xOy) est rectiligne et est modélisé par $v(t) = 10t\mathrm{e}^{-t}$ où $t \geqslant 0$ est le temps.

1. (a) Déterminer $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. Que modélise cette fonction ?
   (b) Le mobile est-il en situation de chute libre ?
2. (a) Justifier que la fonction $t \mapsto -(t+1)\mathrm{e}^{-t}$ est une primitive de la fonction $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t}$.
   (b) En déduire la primitive de v, sachant que la position initiale de l'objet est $x(0) = 5$.

↠ Exercice 7

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 (x^2+3)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^2 (2t+4)\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_1^4 \frac{3}{x^5}\,\mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_1^2 (2\mathrm{e}^x+5x)\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_{-1}^2 t\left(t^2+3\right)\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_{-1}^2 \mathrm{e}^{-t+1}\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_1^2 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$
11. $\displaystyle\int_1^5 \frac{3}{\sqrt{2t+4}}\,\mathrm{d}t$
12. $\displaystyle\int_0^4 \left|t^2-4t+3\right|\,\mathrm{d}t$

↠ Exercice 8

1. Justifier que pour $t \in [0\,;1]$, $\mathrm{e}^{-t^2} \geqslant \mathrm{e}^{-t}$. En déduire une minoration de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.
2. Donner une majoration de $\displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

↠ Exercice 9

On pose $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}\,\mathrm{d}x$.

1. Étudier la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{2-x}$ sur $[0\,;1]$. En déduire, pour tout $x \in [0\,;1]$, $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
2. On pose $\mathrm{J} = \displaystyle\int_0^1 (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   (a) Déterminer des nombres réels a et b tels que la fonction $\mathrm{G} : x \longmapsto (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction $g : x \longmapsto (x+2)\mathrm{e}^{-x}$ sur $[0\,;1]$. En déduire J.
   (b) Montrer que $\dfrac{1}{3\mathrm{e}} \leqslant \mathrm{K} \leqslant \dfrac{1}{6}$.
   (c) Démontrer que $\mathrm{J}+\mathrm{K} = 4\mathrm{I}$. En déduire un encadrement de I, puis en donner une valeur approchée.

↠ Exercice 10

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto x\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et déterminer sa dérivée.
2. En déduire, l'aire en u.a. de la portion de plan comprise entre les courbes $y = x^2$ et $x = \sqrt{x}$ d'une part et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 4$ d'autre part.

↠ Exercice 11

La fonction h est définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{2x+5}{x+1}$.

1. Prouver que pour $x > -1$, $h(x) = 2 + \dfrac{3}{x+1}$.
2. En déduire l'expression de la primitive de la fonction h s'annulant en 1.

↠ Exercice 12

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{x^2+x+1}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que la suite (I_n) est bien définie.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{3(n+1)} \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En déduire la convergence de la suite (I_n).

↠ Exercice 13

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^{-2x} - 3\mathrm{e}^{-3x}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. Montrer que pour tout nombre réel x, $f(x) = 3\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{3}{2} - \mathrm{e}^{-x}\right)$.
2. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Étudier les variations de la fonction f. Dresser son tableau de variations.
4. Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec le axes de repère.
5. Calculer $f(1)$. Tracer l'allure de $\mathscr{C}$ dans un repère.
6. Déterminer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

↠ Exercice 14

La suite (u_n) est définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,\mathrm{d}x$ pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$.

1. Justifier que pour $x \in [0\,;1]$, $0 \leqslant \dfrac{x^n}{1+x} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
2. En déduire que la suite (u_n) est bornée.
3. (a) Prouver que la suite (u_n) est décroissante.
   (b) La suite (u_n) converge-t-elle ?
4. Prouver
$$\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \forall x \in [0\,;1], 0 \leqslant \frac{x^n}{1+x} \leqslant x^n.$$
5. En déduire pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$, puis la limite de la suite (u_n).