↠ Exercice 1

A. Une maladie affecte une proportion p de la population. Un test de dépistage de cette maladie

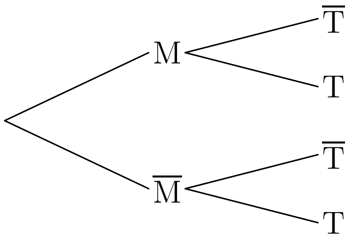
- détecte la maladie chez 97 % des malades ;
- reste négatif chez 99 % des personnes saines.

Suite à des tests effectués sur un échantillon représentatif de la population, on détermine que 98,54 % des tests sont négatifs.
Déterminer la proportion de malades.
B. Pour 100 personnes de cette population, déterminer la probabilité

- qu'exactement 98 tests soient négatifs ;
- que le nombre de tests négatifs soit compris entre 93 et 99.

Guide de résolution.
On note M : « l'individu est malade » et T : « le test est positif ».

1. À l'aide des données de l'énoncé, compléter cet arbre pondéré.



2. À l'aide de l'arbre, exprimer $\mathbf{P}\left(\overline{\mathrm{T}}\right)$ en fonction de p.
3. Conclure à l'aide de la valeur donnée de $\mathbf{P}\left(\overline{\mathrm{T}}\right)$.
4. On note X la variable al"atoire comptant les tests négatifs. Justifier que X suit la loi binomiale de paramètres 100 et $0,985$ 4. Calculer $\mathbf{P}(\mathrm{X}=98)$ et $\mathbf{P}(93 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 99)$.

↠ Exercice 2

A et B sont deux événements indépendants tels que $\mathbf{P}(\mathrm{A})=0,4$ et $\mathbf{P}(\mathrm{B})=0,7$.

1. Les événements A et B sont-ils incompatibles ? Justifier.
2. Calculer et comparer $\mathbf{P}\left(\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}\right)$ et $\mathbf{P}\left(\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}\right)$

↠ Exercice 3

La duchesse d'Aquitaine et celle de Bourgogne attendent chacun l'héritier de leur duché. On pose

A : « l'héritier d'Aquitaine est un garçon » B : « l'héritier de Bourgogne est un garçon » C : « les deux héritiers sont de même sexe »

1. Calculer la probabilité de l'événement $\overline{\mathrm{C}}$.
2. Étudier l'indépendance de A et B, A et C et B et C.
3. A-t-on $\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C})=\mathbf{P}(\mathrm{A}) \times \mathbf{P}(\mathrm{B}) \times \mathbf{P}(\mathrm{C})$?

↠ Exercice 4

A et B sont deux événements de probabilités non nulles. Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant.

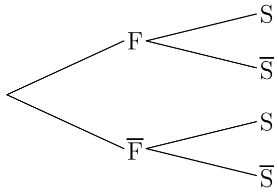
1. Si A et B sont indépendants, alors ils ne sont pas incompatibles.
2. Si A et B sont incompatibles, alors ils sont indépendants.
3. Si A et B sont indépendants, alors A et $A \cup B$ le sont aussi.
4. Si A et B sont indépendants, alors A et $A \cap B$ le sont aussi.
5. Si A et B sont indépendants, alors pour tout événement C, $A \cap C$ et $B \cap C$ le sont aussi.

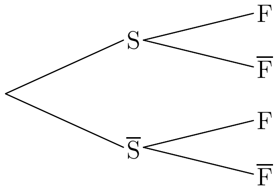
↠ Exercice 5

Une étude réalisée en 2011 par l'Institut National du sommeil et de la vigilance, sur 250 individus de 30 à 40 ans, a donné les résultats suivants.

	Femme	Homme
Prend des somnifères	8	13
Ne prend pas de somnifères	112	117

On note F l'événement « l'individu est une femme » et S « l'individu prend des somnifères ». Compléter les arbres pondérés suivants.





↠ Exercice 6

Pour se rendre de Paris à Abu Dhabi, 25 % des voyageurs choisissent Air France, 40 % Emirates Airlines, les autres choisissent une autre compagnie.
Parmi les voyageurs de Air France, 15 % voyagent en classe « affaires », et parmi ceux d'Emirates Airlines, 25 % en voyagent en classe « affaire ».
On note

- A l'événement « la personne a voyagé sur Air France » ;
- E l'événement « la personne a voyagé sur Emirates Airlines » ;
- B l'événement « la personne a voyagé en classe "affaires" ».

On interroge une personne suivant la liaison Paris-Abu Dhabi.

1. Construire le début de l'arbre pondéré représentant cette expérience aléatoire.
2. On sait par ailleurs que 20 % des personnes se rendant à Abu Dhabi voyagent en classe « affaires ». Compléter l'arbre, en arrondissant au millième.
3. Pour une personne voyageant en classe « affaires », quelle est la probabilité qu'elle ait voyagé avec Air France ?

↠ Exercice 7

Dans un atelier, 2 % des pièces produites sont défectueuses. Au cours du contrôle qualité, on constate que si la pièce est bonne, elle est acceptée dans 96 % des cas, et qui si elle est défectueuse, elle est refusée dans 98 % des cas.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur dans le contrôle ?
2. Quelle est la probabilité qu'une pièce soit bonne, sachant qu'elle a été refusée ?

↠ Exercice 8

Le vaccin contre une certaine maladie n'est pas toujours efficace. Une étude permet les constations suivantes :

- la moitié de la population française est vaccinée ;
- une personne sur cinq atteinte de cette maladie est vaccinée ;
- la probabilité pour une personne d'avoir cette maladie est de $0,6$.

Déterminer la probabilité pour qu'une personne vaccinée attrape malgré tout cette maladie.

↠ Exercice 9

Dans une entreprise, les stocks d'un produit varient d'une semaine sur l'autre en fonction de la demande des clients. Ainsi, certains produits très demandés sont approvisionnés fréquemment, et d'autres plus rarement. Un gestionnaire des stocks a constaté que

- il a approvisionné un produit la première semaine ;
- s'il l'a approvisionné la n-ème semaine, alors la probabilité qu'il doive encore l'approvisionner la $(n+1)$-ème semaine est $0,6$;
- s'il ne l'a pas approvisionné la n-ème semaine, alors la probabilité qu'il doive encore l'approvisionner la $(n+1)$-ème semaine est $0,4$;

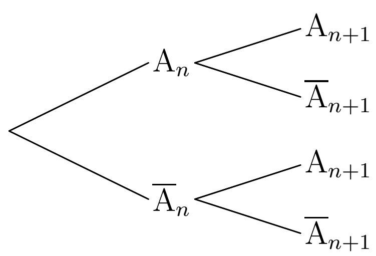
On note A_n l'événement « le gestionnaire des stocks a approvisionné le produit la n-ème semaine », et $p_n = \mathbf{P}(A_n)$.

1. (a) Quelle est la valeur de p_1 ?

   (b) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-contre en utilisant p_n et des probabilités de l'énoncé.

   (c) Exprimer $\mathbf{P}(A_n \cap A_{n+1})$ et $\mathbf{P}\left(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\right)$ en fonction de p_n.

   (d) En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.



2. On définit la suite (u_n) par pour tout entier naturel n non nul par $u_n = p_n - 0,5$.

   (a) Montrer que la suite (u_n) est géométrique, et préciser sa raison et son premier terme. En déduire une expression de p_n en fonction de n.

   (b) Quelle est la probabilité que le gestionnaire approvisionne le produit la quinzième semaine ?

   (c) Déterminer la limite de la suite (p_n). Interpréter.