Exercices : Suites numériques

Exercice 1

La suite $(u_n)_n$ est définie par la relation explicite $u_n = \frac{1}{2}n + 3$, pour tout entier naturel n.

1. Calculer les termes d'indices 2 ; 3 et 7.
2. Calculer le sixième terme.

Exercice 2

La suite $(u_n)_n$ est définie par $\begin{cases} v_{n+1} = 3v_n - 2, n \in \mathbb{N} \\ v_0 = 3 \end{cases}$.

1. Calculer les termes d'indices 2 ; 3 et 7.
2. Calculer le sixième terme.

Exercice 3

On pose $u_n = 2n^2 - 1$, pour tout entier naturel n, et $\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = 2v_n^2 - 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$. Calculer les trois premiers termes de ces deux suites.

Exercice 4

On définit la suite $(w_n)_n$ par son premier terme $w_0 = -4$ et telle qu'en multipliant un terme par 3 et en lui ajoutant 1, on obtienne le terme suivant.

1. Déterminer w_1 et w_2.
2. Donner la relation entre w_n et w_{n+1}.

Exercice 5

La suite $(z_n)_n$ est définie par $\begin{cases} z_{n+1} = -4z_n + 1, n \in \mathbb{N} \\ z_0 = 0 \end{cases}$.

1. Donner une relation liant z_n et z_{n-1}.
2. Donner une relation liant z_{n+2} et z_{n+1}.
3. Donner une relation liant z_{n+2} et z_n.

Exercice 6

La suite $(u_n)_n$ est définie par $u_n = n^3 - 3n^3 + 2n + 5$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer u_0 ; u_1 et u_2.
2. Montrer que $u_n - 5 = n(n^2 - 3n + 2)$. Existe-t-il un entier $n \geqslant 3$ tel que $u_n = 5$?

↠ Exercice 7

La suite $(u_n)_n$ est définie par $u_n = n^2 - 2n$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Calculer les termes u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4.
2. Déterminer les entiers n tels que $u_n = 624$.

↠ Exercice 8

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, où f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1. Calculer les cinq premiers termes de cette suite.
2. Représenter ces termes dans un repère $\left(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

↠ Exercice 9

Pour chacun des algorithmes suivants, déterminer s'il fonctionne grâce à l'expression explicite ou récurrente de la suite. La donner.

```
Entrées :
   A un nombre réel
   N un entier naturel
Traitement :
Pour I variant de 1 à N
   Affecter à A la valeur 5×A−3
Fin Pour
Afficher A
```

```
Entrée :
   N un entier naturel
Traitement :
Affecter à A la valeur 1
Pour I variant de 1 à N
   Affecter à A la valeur 2×A−3
Fin Pour
Afficher A
```

```
Entrée :
N un entier naturel
Traitement :
   A prend la valeur 5×N−3
Afficher A
```

↠ Exercice 10

On définit la suite $(u_n)_n$ par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n+3}{3u_n^2-1},\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

Compléter les algorithmes suivants afin qu'ils calculent le terme d'indice N de cette suite.

```
Entrées :
   U un nombre réel
   N un entier naturel
Traitement :
Pour I variant de 1 à N
   Affecter à U la valeur ...
Fin Pour
Afficher U
```

```
PROGRAM:CALCULP
:Input U
:Input N
:For(I,1,N)
:... →U
:End
:Disp U
```

```
Entrées :
   U un nombre réel
   N un entier naturel
Traitement :
Affecter à I la valeur 1
Tant que I ⩽ N
   Affecter à U la valeur ...
   Affecter à I la valeur ...
Fin Tant que
Afficher U
```

```
PROGRAM:CALCULTQ
:Input U
:Input N
:1→I
:While(I⩽N)
:... →U
:... →I
:End
:Disp U
```

Exercice 11

On définit les suites $(u_n)_n$, $(v_n)_n$, $(w_n)_n$ et $(t_n)_n$ par

$u_n = -3n^2 + 4$

$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = w_n + 2n + 3 \end{cases}$

$v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$

$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_{n+1} = -t_n^2 + t_n - 1 \end{cases}$

1. Calculer les quantités $u_{n+1} - u_n$; $v_{n+1} - v_n$; $w_{n+1} - w_n$ et $t_{n+1} - t_n$. En étudier le signe.
2. En déduire la comparaison des termes d'indice $n+1$ et n pour chacune de ces suites.

Exercice 12

On définit la suite $(h_n)_n$ par $h_n = \dfrac{1}{n+3}$.

1. Déterminer le plus petit rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $h_n \leqslant 0,01$.
2. Déterminer le plus petit rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $h_n \leqslant 10^{-4}$.

Exercice 13

On définit la suite $(p_n)_n$ par $p_n = n^2 - 16n + 55$.

1. Déterminer le plus petit rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $p_n \geqslant 100$.
2. Déterminer le plus petit rang n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $p_n \geqslant 10^8$.

Exercice 14

On définit la suite $(q_n)_n$ par $q_n = \dfrac{1}{3^n}$.

1. Étudier le sens de variation de cette suite.
2. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que $u_n \leqslant 10^{-3}$.

Exercice 15

Traitement :	PROGRAM:SEUIL
Affecter à U la valeur 10	:10→I
Affecter à K la valeur 1	:1→K
Tant que U $\leqslant$ 100	:While U≤100
Affecter à U la valeur 2U − 5	:2U-5→U
Affecter à K la valeur K + 1	:K+1→K
Fin Tant que	:End
Afficher K	:Disp K

On définit la suite $(u_n)_n$ par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 \end{cases}$.

1. Quelle est la sortie de cet algorithme ? L'interpréter.
2. Utiliser la calculatrice pour obtenir le plus petit entier n_0 tel que $u_n \geqslant 1\,000$.

Exercice 16

On définit la suite $(h_n)_n$ par $h_n = \dfrac{2n+1}{n^2+1}$. Modifier l'algorithme de l'exercice précédent afin qu'il donne le plus petit rang n_0 tel que $h_n \leqslant 0,000\,1$.