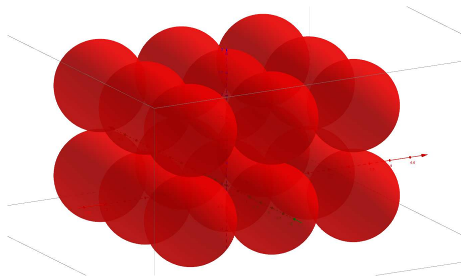
Activité : Continuité

1 Un empilement de billes

On dispose d'un récipient cubique de côté x (en dm), avec $0 < x < 3$.

1. On remplit ce récipient d'eau. On note $g(x)$ le volume d'eau, en dm^3, contenu dans le récipient. Donner l'expression de $g(x)$ en fonction de x pour $0 < x < 3$, puis tracer la courbe représentative de la fonction g sur $]0;3[$.
2. On remplit ce récipient de billes de diamètre 1 dm, les billes étant empilées comme ci-contre.
   (a) combien de billes peut-on mettre lorsque $0 < x < 1$?
   (b) combien de billes peut-on mettre lorsque $1 \leqslant x < 2$?
   (c) combien de billes peut-on mettre lorsque $2 \leqslant x < 3$?



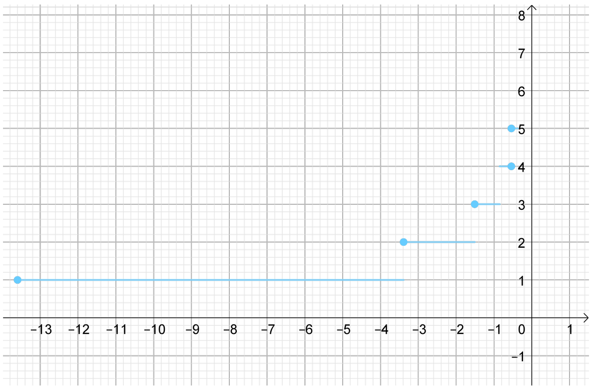
3. On note $f(x)$ le nombre de billes mises dans le récipient.
   (a) Selon les valeurs de x, donner l'expression de $f(x)$ en fonction de x puis tracer la courbe représentative de la fonction f sur $]0;3[$.
   (b) Comparer les deux courbes.

2 Considérations énergétiques

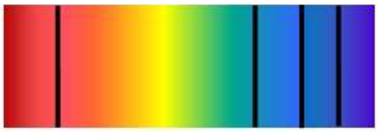
2.1 Point de vue macroscopique

Du dihydrogène gazeux $H_{2(g)}$ de masse $m = 1$ kg sous une pression de $P = 1{,}013$ hPa et une température initiale de $T = 16°C = -257$ K passe à la température $T \in [-261\,;-253]$ (en Kelvin). On peut alors mesurer la quantité d'énergie transférée par $Q(T) = mc_p\Delta T = mc_p(T+257)$, où $c_p \approx 2{,}016 \times 10^{-3}$ kg/mol est la capacité thermique massique du dihydrogène à cette température-là.
Reconnaître la famille de fonction à laquelle appartient la fonction $T \mapsto Q(T)$. Cette fonction est-elle continue sur son ensemble de définition ?

2.2 Point de vue atomique



En fonction de l'énergie absorbée E par un atome d'hydrogène, son état quantique n (n étant un entier) peut changer : le 1 représente le fondamental, les autres correspondant aux états excités. On a représenté ci-contre le graphe qui à l'énergie absorbée (donc négative) exprimée en eV (électron-Volt) associe l'état de l'atome d'hydrogène.
La fonction ci-contre est-elle continue sur $]-13,6;0[$? Était-ce prévisible ?
L'hydrogène repassera à l'état fondamental $n=1$ par émission d'un photon γ dont la longueur d'onde est caractérisée par $E=\frac{hc}{\lambda}$ et on trouve ainsi le spectre d'émission de l'hydrogène (source image : site de l'ENS Lyon).



3 Une fonction particulière : la fonction « partie entière »

Tout nombre réel x appartient à un *unique* intervalle de la forme $[n;n+1[$ où n est un nombre entier. Cet entier n est appelé **partie entière (par défaut) de** x ; il est noté $\lfloor x \rfloor$.

1. Pour chacun des entiers suivants, préciser l'unique intervalle de la forme $[n;n+1[$ où $n \in \mathbb{Z}$ qui le contient et donner sa partie entière :

   $2,5$ $\quad 4 \quad$ π $\quad \frac{3}{4} \quad$ -2 $\quad -0,1$

2. À chaque nombre x, la fonction partie entière associe un unique entier relatif n (elle est donc bien définie).
   On va s'intéresser à la question réciproque.
   (a) Formuler l'énoncé réciproque.
   (b) Justifier qu'il existe un nombre dont la partie entière est 0.
   (c) Donner les solutions de l'équation d'inconnue x : $\lfloor x \rfloor = 0$.
   (d) Donner les solutions de l'équation d'inconnue x : $\lfloor x \rfloor = n$.
3. L'équation d'inconnue x : $\lfloor x \rfloor = 0,3$ a-t-elle des solutions ? Pourquoi ?

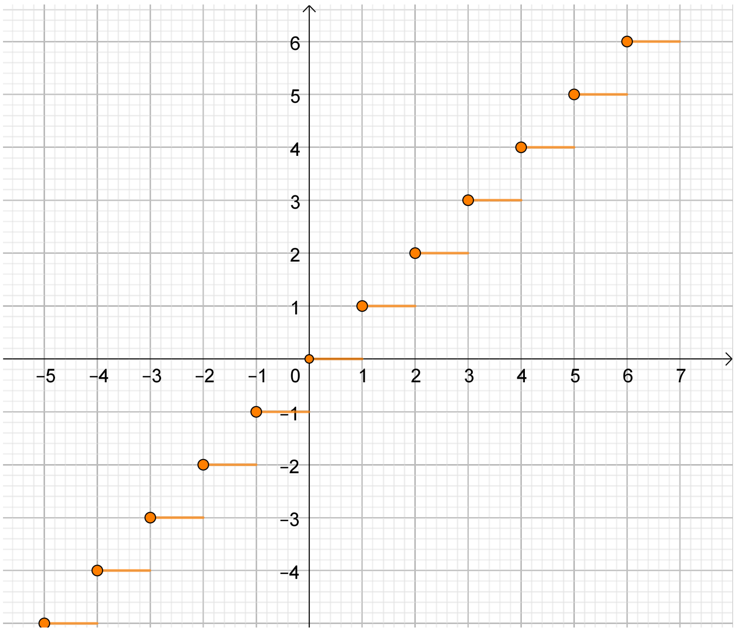
4 Représentation graphique de la fonction « partie entière »

1. (a) Utiliser votre calculatrice pour représenter la fonction « partie entière » via la fenêtre Xmin $=0$; Xmax $=3$; Ymin $=0$; Ymax $=3$ et la commande « partEnt(» (menu `math` puis NUM).
   (b) Grâce à cette représentation graphique, résoudre graphiquement l'équation $\lfloor x \rfloor = 0,3$.
   Est-ce cohérent avec la question **3**.3. ? Déterminer ce qui « pose problème ».
   (c) Modifier la fenêtre pour représenter la fonction sur $[0,99;1,01]$ puis sur $[0,9999;1,0001]$.
   Que constater-vous ?

(d) Contrôler via le menu table en utilisant un pas de plus en plus fin.
Le nombre $0,3$ apparaît-il dans les valeurs prises par la fonction ? Vérifier que la table ne donne que des valeurs images entières.

2. Calculer $\lfloor 1 \rfloor$.
Déterminer ensuite $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \lfloor x \rfloor$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \lfloor x \rfloor$.
La fonction « partie entière » n'a pas de limite en 1 *car la limite par valeurs inférieures est différente de la limite par valeurs supérieures... bien qu'elle soit définie et qu'elle est une image en* 1 *! On dit alors que la fonction partie entière* ***n'est pas continue en*** 1*. Graphiquement, la courbe de cette fonction présente « un saut ».*

3. Pour quelle(s) autre(s) valeur(s) la fonction partie entière est-elle discontinue ?



4. Représenter la fonction partie entière sur $[-3;3]$.

Convention : un point signifie que le point en question appartient bien à la courbe, un crochet ouvert signifie qu'il en est exclu.