Les nombres complexes

1 La « Commedia dell'arte » chez les mathématiciens italiens du XVI$^{\text{ème}}$ siècle

Les mathématiciens du XVI$^{\text{ème}}$ siècle se lançaient des concours en résolvant des équations de la forme « $ax^3+bx^2+cx+d=0$ », avec $a \neq 0$: ce sont des équations du troisième degré.
Modulo un petit changement de variables $\left(x \mapsto x - \frac{b}{3a}\right)$ et des simplifications, on aboutit à l'équation suivante :

$$\mathrm{X}^3 + p\mathrm{X} + q = 0.$$

Giordano Caradano (franscisé Jérôme Cardan) propose dans son ouvrage Ars Magna en 1545 une formule pour trouver une solution de cette équation.

Pour l'anecdote : Niccolò Fontana, *dit* Tartaglia, *avait découvert cette méthode à l'occasion d'un concours en 1535 et avait décidé de ne la relever à personne (en espérant gagner des concours avec, et donc de l'argent).* Cardano *a invité* Tartaglia *pour obtenir cette fameuse méthode... et l'obtient en échange de la promesse de ne ni la dévoiler ni la publier.* Cardano *finit par la publier, et* Tartaglia *manqua de perdre la vie des suites de cette histoire.*

1. On considère l'équation $\mathrm{X}^3 - 36\mathrm{X} - 91 = 0$.
   (a) On pose $\mathrm{X} = u + v$. Montrer que qu'on aboutit alors à l'équation
   $u^3 + v^3 + 3(u+v)(uv-12) - 91 = 0$.
   (b) Comme on est passé d'une inconnue X à deux « inconnues » u et v, on peut imposer une condition sur u et v. Ici on choisit $uv - 12 = 0$.
   Démontrer que les nombres u^3 et v^3 sont solutions du système $\begin{cases} u^3 + v^3 = 91 \\ u^3 \times v^3 = 1728 \end{cases}$.
   (c) Résoudre le système $\begin{cases} z_1 + z_2 = 91 \\ z_1 z_2 = 1728 \end{cases}$ et en déduire une solution de l'équation de départ.
   (d) Déterminer deux nombres réels b et c tels que $\mathrm{X}^3 - 36\mathrm{X} - 91 = (\mathrm{X} - \alpha)(\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c)$, où α est la solution de l'équation précédemment trouvée.
   (e) En déduire les solutions de l'équation $\mathrm{X}^3 - 36\mathrm{X} - 91 = 0$.
2. On considère l'équation $\mathrm{X}^3 - 15\mathrm{X} - 4 = 0$.
   (a) Peut-on appliquer la méthode de Cardano ? Pourquoi ?
   (b) Pour s'en sortir, Cardano utilise des racines de nombres négatifs. Raffaelle Bombelli développe leur utilisation et Leonhard Euler les recouvre d'un voile pudique en notant i le nombre tel que :
   $$\mathrm{i}^2 = -1.$$
   et ainsi, i est une racine carrée de -1.
   Exprimer le discriminant en fonction de i.

(c) Démontrer, en utilisant la relation $\mathrm{i}^2 = -1$ que

- $(2+\mathrm{i})^3 = 2+11\,\mathrm{i}$;
- $(2-\mathrm{i})^3 = 2-11\,\mathrm{i}$.

(d) En déduire une solution de l'équation $X^3 - 15X - 4 = 0$.

(e) Finir la résolution de cette équation.

Dans le cas où le discriminant $-4p^3 - 27q^2 \leqslant 0$, une solution est donnée par :

$$X_0 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

2 Représentation géométrique des nombres complexes

Carl Gauss a proposé de partir de la droite réelle graduée « standard » et d'y rajouter une ligne droite pour représenter toutes les quantités, réelles et imaginaires, au moyen d'un plan.
L'idée est d'associer au point de coordonnées $(a\,;b)$ le nombre complexe $a+\mathrm{i}\,b$ et inversement.
On munit le plan d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$ (pour des raisons évidentes de conflit de notation on utilise cette notation au lieu de $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{\imath},\,\vec{\jmath}\right)$).

On adopte les convention suivantes :

- l'axe des abscisses représente l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Ainsi, à tout nombre réel x, on associe le point $\mathrm{P}(x\,;0)$ et réciproquement.
- à tout point M du plan, on associe un nombre complexe z ;
- le point $\mathrm{V}(0\,;1)$ représente le nombre complexe i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$;
- le point M de coordonnées $(a\,;b)$ représente le nombre complexe $z = a+\mathrm{i}\,b$

1. (a) Placer les points N_1, N_2 et N_3 associés respectivement aux nombres complexes $3\mathrm{i}$; 0 ; $-\mathrm{i}$.
   Donner les coordonnées de chacun de ces points dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

   (b) Donner les nombres complexes associés aux points $\mathrm{N}_4(0\,;5)$ et $\mathrm{N}_5(0\,;-2)$.

   (c) Placer les points M_1, M_2 et M_3 associés respectivement aux nombres complexes
   $z_1 = 2+3\mathrm{i}$; $z_2 = -1+4\mathrm{i}$ et $z_3 = 5-2\mathrm{i}$.
   Donner les coordonnées de chacun de ces points dans le repère $\left(\mathrm{O}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$.

   (d) Donner les nombres complexes associés aux points $\mathrm{M}_4(1\,;2)$ et $\mathrm{M}_5\left(-\sqrt{2}\,;\frac{3}{5}\right)$.

2. (a) Déterminer les coordonnées du point I, milieu du segment [AB] où A et B sont les points associés respectivement aux nombres complexes $z_\mathrm{A} = 3+5\mathrm{i}$ et $z_\mathrm{B} = 5$.

   (b) Déterminer les coordonnées du point S tel que $\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}$.

   (c) Déterminer les coordonnées du point P tel que le quadrilatère BAEP soit un parallélogramme et où E est le point de coordonnées $(-3\,;1)$.