Activité :
raisonnement par récurrence

1 Principe de démonstration

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ et $\begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} = v_n + \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$.

1. Pour $k \in [\![1;4]\!]$, montrer que $u_n = v_n$.
2. Expliquer pourquoi on ne peut pas (encore) affirmer que pour tout $n \geqslant 1$ entier, $u_n = v_n$.
3. Une propriété, notée $\mathcal{P}(n)$, dépendant d'un entier n peut être démontrée de la manière suivante :
   - pour un entier n_0, montrer la propriété au rang n_0 (*e.g.* montrer $\mathcal{P}(0)$ ou $\mathcal{P}(1)$) ;
   - montrer pour tout $n \geqslant n_0$ qu'en supposant $\mathcal{P}(n)$, on peut démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On note ici $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = v_n$ ».
   On fixe ici $n_0 = 1$.
   On a déjà montré $\mathcal{P}(1)$ (et même $\mathcal{P}(2)$, $\mathcal{P}(3)$ et $\mathcal{P}(4)$).
   En supposant l'égalité $u_n = v_n$ pour un entier $n \geqslant 1$ quelconque, montrer que $u_{n+1} = v_{n+1}$.
   On s'appuiera sur la relation de récurrence donnée pour la suite (v_n).
   Avoir démontré $\mathcal{P}(1)$ et $\forall n \geqslant 1, \mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)$ suffit à montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie *i.e.* $v_n = \dfrac{n}{n+1}$.

2 Démontrer une égalité

On définit la suite $(u_n)_n$ par sa relation récurrente : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 2 \end{cases}$.

1. (a) Calculer u_1, u_2 et u_3.
   (b) On définit la suite $(v_n)_n$ par $v_n = 3^n + 1$. Calculer v_0 ; v_1 ; v_2 et v_3.
   (c) Que remarque-t-on ?
   (d) Peut-on affirmer que *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n + 1$?
2. On va montrer la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 3^n + 1$ » pour tout $n \geqslant 0$ en utilisant le raisonnement par récurrence.
   (a) Identifier n_0 et démontrer $\mathcal{P}(n_0)$.
   (b) Écrire $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$. En partant de $\mathcal{P}(n)$, démontrer $\mathcal{P}(n+1)$.
   (c) Conclure.

3 Démontrer une inégalité

On veut montrer la propriété $\mathcal{I}(n)$: « $2^n \geqslant 4n$ » pour $n \geqslant 4$.

1. Identifier n_0 et démontrer $\mathcal{I}(n_0)$.
2. Écrire $\mathcal{I}(n)$ et $\mathcal{I}(n+1)$. En partant de $\mathcal{I}(n)$, démontrer $\mathcal{I}(n+1)$.
3. Conclure.

4 Quelques exercices

↠ Exercice 1

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 2$, $4^n \geqslant 4n+1$.

↠ Exercice 2

$(u_n)_n$ est la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5} \end{cases}$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, $0 < u_n < 3$.

↠ Exercice 3

$(c_n)_n$ est la suite définie par $\begin{cases} c_0 = 3 \\ c_{n+1} = \dfrac{5c_n + 3}{c_n + 3} \end{cases}$.

1. Calculer c_1 et c_2. Émettre une conjecture.
2. Démontrer cette conjecture.