

Activité : radioactivité & exponentielle

Un corps simple est dit **radioactif** si des noyaux atomiques instables (par excès de protons, de neutrons, voire de nucléons) se transforment spontanément en d'autres atomes par désintégration.

Des observations (réalisées en mesurant le nombre de désintégrations) permettent de mettre en évidence la loi suivante pour chaque élément radioactif : « le rapport du nombre de noyaux désintégrés entre deux instants par le temps écoulé est proportionnel au nombre de noyaux non désintégrés à l'instant initial ».

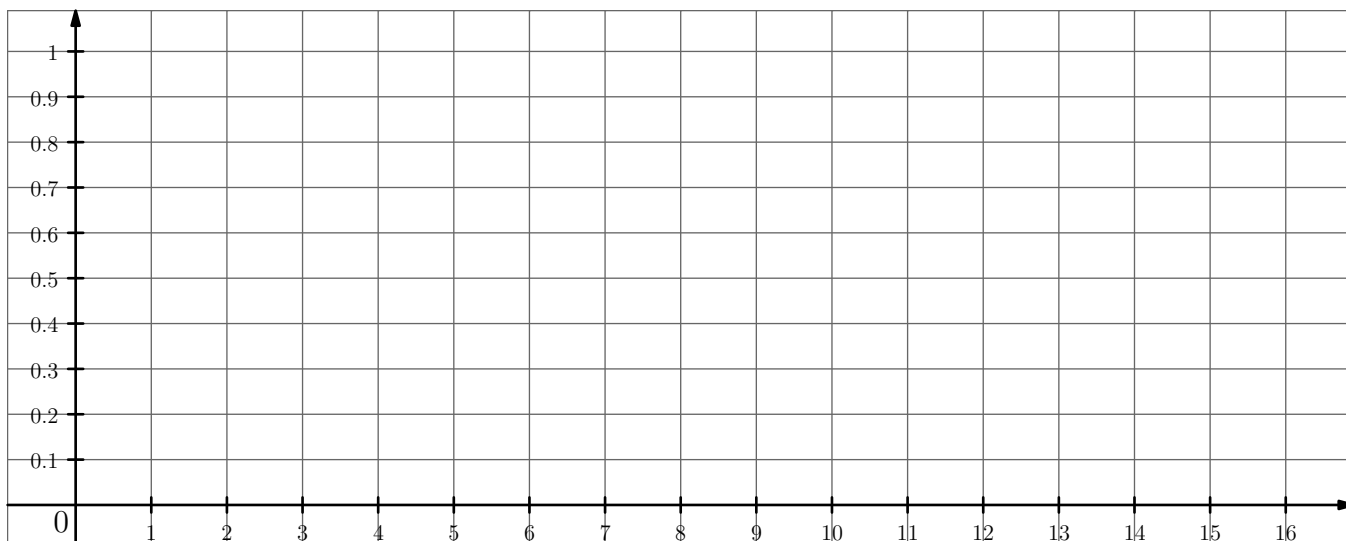
1. On note k le coefficient de proportionnalité indiqué dans la loi, et pour un temps $t \geq 0$, on note $N(t)$ le nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t .
 - (a) Pour un laps de temps $h \geq 0$, écrire une relation entre $N(t+h)$; $N(t)$; k et h .
 - (b) Justifier que $k < 0$. Les physiciens préférant les constantes positives, on note $\lambda = -k$.
 - (c) Montrer que si $h \rightarrow 0$, la loi donne une relation, notée (ED), entre la fonction N et sa fonction dérivée N' .

2. Pour une fonction u définie sur un intervalle I , on peut définir la fonction e^u comme composée de la fonction u avec la fonction \exp , comme par exemple la fonction $x \mapsto e^{2x}$.

Si la fonction u est dérivable sur l'intervalle I , la fonction e^u l'est aussi, et on a : $(e^u)' = u'e^u$.

Ainsi, la dérivée de la fonction $x \mapsto e^{2x}$ est $x \mapsto 2e^{2x}$.

- (a) On pose $\rho(t) = e^{-\lambda t}$ pour $t \geq 0$. Justifier que la fonction ρ vérifie la relation (ED) et qu'elle est décroissante sur \mathbb{R}_+ .
 - (b) Si on note N_0 le nombre de noyaux initial, *i.e.* $N(0) = N_0$, interpréter $\rho(t) = \frac{N(t)}{N_0}$.
En déduire que $\rho(t) \leq 1$.
3. Pour l'uranium 238 (92 protons, 238 nucléons), on estime que $\lambda = 0,155 \text{ Gan}^{-1}$.
 - (a) Tracer la courbe représentative de la fonction $\rho : t \mapsto e^{-0,155t}$ dans le repère ci-dessous, où t est exprimé en milliards d'années.



- (b) Déterminer graphiquement le temps de demi-vie $\tau_{1/2}$, *i.e.* le temps au bout duquel 50 % des noyaux soient désintégrés.
- (c) Déterminer graphiquement le temps de quart-vie $\tau_{1/4}$, *i.e.* le temps au bout duquel 25 % des noyaux soient désintégrés. En déduire une relation simple entre $\tau_{1/2}$ et $\tau_{1/4}$.