Devoir Surveillé 1 - Correction

Exercice 1

1. « Le produit de deux diviseurs d'un même nombre est encore un diviseur de ce nombre. »

   FAUX. Contre-exemple : 5 et 10 sont deux diviseurs de 20, alors que $5 \times 10 = 50$ n'est pas un diviseur de 20.

2. « Pour deux nombres entiers a et b avec $b \neq 0$, il existe un unique nombre entier q et un unique nombre entier r tels que $a = b \times q + r$. »

   FAUX. Contre-exemple : avec $a = 50$ et $b = 3$, on a : $50 = 3 \times 16 + 2 = 3 \times 10 + 20$. On peut avoir $q = 16$ et $r = 2$, ou bien $q = 10$ et $r = 20$.

   Remarque : La définition de la division euclidienne impose que $0 \leqslant r < b$, condition qui n'était pas donnée ici.

3. « Pour deux nombres entiers n et p, si $n \times p$ est pair, alors $n + p$ est pair. »

   FAUX. Contre-exemple : $2 \times 3 = 6$ est pair alors que $2 + 3 = 5$ est impair.

4. « Le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par n vaut toujours 4. »

   FAUX. Contre-exemple : si $n = 1$ alors $(n+2)^2 = 9 = 9 \times 1 + 0$. Le reste de la division euclidienne de $(n+2)^2$ par n vaut 0.

   Remarque : Si $n \geqslant 4$, alors la propriété est vraie.

5. « Si a divise $b \times c$ alors a divise b ou a divise c. »

   FAUX. Contre-exemple : 4 divise $10 \times 6 = 60$ alors que 4 ne divise ni 10 ni 6.

6. « Si n est un multiple de 12 alors le reste dans la division euclidienne de n par 11 vaut 1. »

   FAUX. Contre-exemple : 24 est un multiple de 12, et $24 = 11 \times 2 + 2$. Le reste de la division euclidienne de 24 par 11 vaut 2.

Exercice 2

Notons a et b ces deux nombres. On a alors :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a - b = 399 \\ a = 15 \times b + 21 \end{cases} &\iff \begin{cases} a = b + 399 \\ b + 399 = 15 \times b + 21 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = b + 399 \\ 14b = 378 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a = 27 + 399 = 426 \\ b = 27 \end{cases}
\end{aligned}$$

On conclut : $a = 426$ et $b = 27$.

Exercice 3

Démontrer que pour tout nombre entier n, $n(n^2+5)$ est pair en raisonnant par disjonction des cas.

- **Si n est pair :** alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$ donc :

$$\begin{aligned} n(n^2+5) &= 2k((2k)^2+5) \\ &= 2 \times [k(4k^2+5)] \end{aligned}$$

C'est bien un nombre pair.

- **Si n est impair :** alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$ donc :

$$\begin{aligned} n(n^2+5) &= (2k+1)((2k+1)^2+5) \\ &= (2k+1)(4k^2+4k+1+5) \\ &= (2k+1)(4k^2+4k+6) \\ &= 2 \times (2k+1)(2k^2+2k+3) \end{aligned}$$

C'est bien un nombre pair.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{Z},\ 2|n(n^2+5)$.

Exercice 4

1. Les diviseurs de 150 sont : $\{1\,;2\,;3\,;5\,;6\,;10\,;15\,;25\,;30\,;50\,;75\,;150\}$.

2. Pour tout nombre entier naturel n, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n+k)$ est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme n. D'après le cours de Première, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}(n+k) = (n+1) \times \frac{n+(n+n)}{2} = \frac{3n(n+1)}{2}.$$

Ainsi, dire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(n+k)$ divise 225 revient à dire qu'il existe un certain nombre entier p tel que :

$$\begin{aligned} 225 = p \times \sum_{k=0}^{n}(n+k) &\iff 225 = \frac{3n(n+1)}{2} \times p \\ &\iff 450 = 3n(n+1) \times p \\ &\iff 150 = n(n+1) \times p \end{aligned}$$

Cela revient à chercher, pour les possibles valeurs de n, les couples de diviseurs entiers consécutifs de 150.

D'après la question précédente, on peut donc avoir $n = 1$, $n = 2$ et $n = 5$.