Devoir Maison 1 - Correction

Exercice 1

On définit la suite u par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$.

1. $u_0 = 3^{2\times 0+1} + 2^{0+2} = 3^1 + 2^2 = 7 \times 1$ est divisible par 7.
   $u_1 = 3^{2\times 1+1} + 2^{1+2} = 3^3 + 2^3 = 35 = 7 \times 5$ est divisible par 7.
   $u_2 = 3^{2\times 2+1} + 2^{2+2} = 3^5 + 2^4 = 259 = 7 \times 37$ est divisible par 7.
   $u_3 = 3^{2\times 3+1} + 2^{3+2} = 3^7 + 2^5 = 2219 = 7 \times 317$ est divisible par 7.
2. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
2u_n + 7 \times 3^{2n+1} &= 2 \times (3^{2n+1} + 2^{n+2}) + 7 \times 3^{2n+1} \\
&= 2 \times 3^{2n+1} + 2^{n+3} + 7 \times 3^{2n+1} \\
&= 9 \times 3^{2n+1} + 2^{n+3} \\
&= 3^2 \times 3^{2n+1} + 2^{n+3} \\
&= 3^{2n+3} + 2^{n+3} \\
&= 3^{2(n+1)+1} + 2^{(n+1)+2} \\
&= u_{n+1}
\end{aligned}$$

3. On va démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $7|u_n$.
   - **Initialisation :** $7|u_0 = 7$. Le cas de base est démontré.
   - **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $7|u_k$ et l'on veut montrer que $7|u_{k+1}$.
     On a : $u_{k+1} = 2u_k + 7 \times 3^{2k+1}$, qui est une somme de nombres divisibles par 7 (trivial), donc $7|u_{k+1}$.
     L'hérédité est démontrée.
   - **Conclusion :** La propriété est initialisée pour $n = 0$ et est héréditaire. On conclut qu'en vertu du principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $7|u_n$.

Exercice 2

On s'intéresse à l'équation $\mathcal{E} : x^2 = 4y^2 + 20$, où x et y sont deux nombres entiers naturels.

1. Les diviseurs positifs de 20 sont : $\{1\,;2\,;4\,;5\,;10\,;20\}$.
2.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &\iff x^2 = 4y^2 + 20 \\
&\iff x^2 - 4y^2 = 20 \\
&\iff (x - 2y) \times (x + 2y) = 20
\end{aligned}$$

   Ainsi, on cherche x et y dans $\mathbb{N}$ tels que $(x-2y)$ et $(x+2y)$ sont des diviseurs de 20.
   Il est trivial que $x - 2y < x + 2y$.
   On liste tous les cas possibles :

$x-2y$	$x+2y$
1	20
2	10
4	5

On résout alors :

Cas 1 :

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y=1 \\ x+2y=20 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=1+2y \\ 1+2y+2y=20 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=1+2y \\ 4y=19 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=1+2y \\ y=\dfrac{19}{4} \notin \mathbb{N} \end{array}\right.$$

Cas 2 :

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y=2 \\ x+2y=10 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=2+2y \\ 2+2y+2y=10 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=2+2y \\ 4y=8 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=6 \\ y=2 \end{array}\right.$$

Cas 3 :

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y=4 \\ x+2y=5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=4+2y \\ 4+2y+2y=5 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=4+2y \\ 4y=1 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{l} x=1+2y \\ y=\dfrac{1}{4} \notin \mathbb{N} \end{array}\right.$$

En conclusion, l'ensemble solution dans $\mathbb{N}$ de l'équation est : $\mathcal{S}=\{(6\,;2)\}$.