

Devoir Surveillé 2

Jeudi 20 décembre 2018

Exercice 1 (11 points)

La suite u est définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 5u_n - 6 \end{cases} .$$

- (1 point) Quelle conjecture peut-on émettre sur les deux derniers chiffres de u_n ?
- (a) (2 points) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$.
(b) (2 points) En déduire que : $\forall k \in \mathbb{N}, u_{2k} \equiv 2 \pmod{4}$ et $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}$.
- (a) (2 points) Démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_n = 5^{n+2} + 3$.
(b) (3 points) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_n \equiv 28 \pmod{100}$.
- (1 point) Démontrer la conjecture émise dans la question 1.

Exercice 2 (4 points)

Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 13 \mid (7^{2n} - 23^n)$.

Exercice 3 (5 points)

- (2 points) Déterminer les restes de la division euclidienne de 5^p par 13 pour $p \in \mathbb{N}$.
- (3 points) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, 13 \mid (31^{4n+1} + 18^{4n-1})$.