Devoir Surveillé 2 - Correction

Exercice 1

1. $u_0 = 14\,;\ u_1 = 64\,;\ u_2 = 314\,;\ u_3 = 1564\,;\ u_4 = 7814\,;\ \ldots$
   Il semblerait que les deux derniers chiffres de u_n soient soit 14, soit 64.
2. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &\equiv 5u_{n+1} - 6 \pmod 4 \\ &\equiv 5(5u_n - 6) - 6 \pmod 4 \\ &\equiv 25u_n - 30 - 6 \pmod 4 \\ &\equiv 25u_n - 36 \pmod 4 \end{aligned}$$

   Or on sait que $25 \equiv 1 \pmod 4$ et $36 \equiv 0 \pmod 4$. On en tire : $u_{n+2} = u_n \pmod 4$.

   (b) D'après la question précédente, les termes de rang pair de la suite u sont congrus modulo 4 et ceux de rang impair sont congrus modulo 4.
   Comme $u_0 \equiv 2 \pmod 4$, on en tire que les termes de rang pair sont congrus à 2 modulo 4, donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k} \equiv 2 \pmod 4$.
   De même, $u_1 \equiv 0 \pmod 4$, donc les termes de rang impair sont congrus à 0 modulo 4, donc : $\forall k \in \mathbb{N}$, $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod 4$.
3. (a) On va démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.
   - **Initialisation :** $5^{0+2} + 3 = 25 + 3 = 28 = 2u_0$. Le cas de base est démontré.
   - **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $2u_k = 5^{k+2} + 3$ et on veut montrer que : $2u_{k+1} = 5^{k+3} + 3$.
     On a :

$$\begin{aligned} 2u_{k+1} &= 2(5u_k - 6) \\ &= 5 \times 2u_k - 12 \\ &= 5 \times (5^{k+2} + 3) - 12 \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= 5^{k+3} + 15 - 12 \\ &= 5^{k+3} + 3 \end{aligned}$$

     L'hérédité est démontrée.
   - **Conclusion :** La propriété est initialisée pour $n = 0$ et est héréditaire, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

   (b) On va démontrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $5^{n+2} \equiv 25 \pmod{100}$.
   - **Initialisation :** $5^2 \equiv 25 \pmod{100}$. Le cas de base est démontré.
   - **Hérédité :** Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $5^{k+2} \equiv 25 \pmod{100}$ et on veut montrer que : $5^{k+3} \equiv 25 \pmod{100}$.
     On a :

$$\begin{aligned} 5^{k+3} &\equiv 5 \times 5^{k+2} \pmod{100} \\ &\equiv 5 \times 25 \pmod{100} \quad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &\equiv 125 \pmod{100} \\ &\equiv 25 \pmod{100} \end{aligned}$$

L'hérédité est démontrée.
- **Conclusion :** La propriété est initialisée pour $n = 0$ et est héréditaire, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $5^{n+2} \equiv 25 \pmod{100}$.

On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} 2u_n &\equiv 5^{n+2} + 3 \pmod{100} \\ &\equiv 25 + 3 \pmod{100} \\ &\equiv 28 \pmod{100} \end{aligned}$$

4. D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$. Or les deux seuls nombres compris entre 0 et 100 tels que leur double soit congru à 28 modulo 100 (c'est-à-dire qu'ils se terminent par 28) sont 14, car $2 \times 14 = 28$ et 64, car $2 \times 64 = 128$.
   Ainsi, on a soit $u_n \equiv 14 \pmod{100}$, soit $u_n \equiv 64 \pmod{100}$. Cela revient à dire que les deux derniers chiffres de u_n sont soit 14, soit 64.

Exercice 2

On sait que $7^2 = 49 \equiv 10 \pmod{13}$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $7^{2n} \equiv 10^n \pmod{13}$.
Par ailleurs, $23 \equiv 10 \pmod{13}$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $23^n \equiv 10^n \pmod{13}$.
En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $7^{2n} - 23^n \equiv 10^n - 10^n \equiv 0 \pmod{13}$. Cela revient à dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $13 | (7^{2n} - 23^n)$.

Exercice 3

1. Les restes de la division euclidienne de 5^p par 13 pour $p \in \mathbb{N}$ sont :
   - $5^0 \equiv 1 \pmod{13}$;
   - $5^1 \equiv 5 \pmod{13}$;
   - $5^2 \equiv 25 \equiv 12 \pmod{13}$;
   - $5^3 \equiv 60 \equiv 8 \pmod{13}$;
   - $5^4 \equiv 40 \equiv 1 \pmod{13}$;
   - $5^5 \equiv 5 \pmod{13}$;
   - $5^6 \equiv 25 \equiv 12 \pmod{13}$;
   - $5^7 \equiv 60 \equiv 8 \pmod{13}$;
   - $5^8 \equiv 40 \equiv 1 \pmod{13}$;
   - $5^9 \equiv 5 \pmod{13}$;
   - et ainsi de suite.

   On procède par disjonction des cas :
   - **Si** $p \equiv 0 \pmod{4}$ **:** il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k$. On a donc $5^p = 5^{4k} = (5^4)^k = 625^k$.
     Or $625 \equiv 1 \pmod{13}$ donc $5^p \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{13}$.
   - **Si** $p \equiv 1 \pmod{4}$ **:** il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k + 1$. On a donc $5^p = 5^{4k+1} = 5 \times (5^4)^k = 5 \times 625^k$.
     Or $625 \equiv 1 \pmod{13}$ donc $5^p \equiv 5 \times 1^k \equiv 5 \pmod{13}$.
   - **Si** $p \equiv 2 \pmod{4}$ **:** il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k + 2$. On a donc $5^p = 5^{4k+2} = 5^2 \times (5^4)^k = 25 \times 625^k$.
     Or $625 \equiv 1 \pmod{13}$ et $25 \equiv 12 \pmod{13}$ donc $5^p \equiv 12 \times 1^k \equiv 12 \pmod{13}$.

- **Si** $p \equiv 3 \pmod 4$ **:** il existe alors $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k+3$. On a donc $5^p = 5^{4k+3} = 5^3 \times (5^4)^k = 125 \times 625^k$.

  Or $625 \equiv 1 \pmod{13}$ et $125 \equiv 8 \pmod{13}$ donc $5^p \equiv 8 \times 1^k \equiv 8 \pmod{13}$.

  En conclusion, 5^p est congru soit à 1, soit à 5, soit à 8, soit à 12 modulo 13.

2. On a : $31 \equiv 5 \pmod{13}$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $31^{4n+1} \equiv 5^{4n+1} \pmod{13}$. D'après la question précédente, comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $4n+1 \equiv 1 \pmod 4$, on a : $31^{4n+1} \equiv 5 \pmod{13}$.

   Par ailleurs : $18 \equiv 5 \pmod{13}$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $18^{4n-1} \equiv 5^{4n-1} \pmod{13}$. D'après la question précédente, comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $4n-1 \equiv 3 \pmod 4$, on a : $18^{4n-1} \equiv 8 \pmod{13}$.

   On en tire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $31^{4n+1} + 18^{4n-1} \equiv 5 + 8 \equiv 13 \equiv 0 \pmod{13}$.

   On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $13 | \left(31^{4n+1} + 18^{4n-1}\right)$.