119 **1. a.** Dans les deux algorithmes, on reconnaît la suite arithmétique de premier terme 2 d'indice 0 et de raison –0,5 : dans l'algorithme 1 par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - 0{,}5$ et dans l'algorithme 2 par le terme général $v_n = 2 - 0{,}5n$.

Algorithme 1
$U \leftarrow 2$
Pour N allant de 1 à 6
$U \leftarrow U - 0{,}5$
Fin Pour

Algorithme 2
$K \leftarrow 0$
Tant que K ⩽ 6
$V \leftarrow 2 - 0{,}5 \times K$
$K \leftarrow K + 1$
Fin Tant que

b. Les deux algorithmes calculent le 7e terme : $u_6 = v_6 = 2 - 0{,}5 \times 6 = -1$.

Voir le fichier Python ressource dans le manuel numérique enseignant.

```
def algo1_1():
    U=2
    for N in range(1,7):
        U=U-0.5
    return U
```

```
def algo1_2():
    K=0
    while K<=6:
        V=2-0.5*K
        K=K+1
    return V
```

2. *Remarque : Dans l'exemplaire de l'élève (Édition 02), l'algorithme 1 est modifié : N démarre à 1 au lieu de 0. D'où le corrigé ci-dessous.*

Algorithme 1
Pour N allant de 1 à 5
$U \leftarrow -3 \times 2$^N
Fin Pour

Algorithme 2
$V \leftarrow -3$
$K \leftarrow 1$
Tant que $K \leqslant 5$
$V \leftarrow 2V$
$K \leftarrow K + 1$
Fin Tant que

a. Dans les deux algorithmes, on reconnait une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $-3 \times 2 = -6$ d'indice 1.

b. Les deux algorithmes calculent :
$u_5 = v_5 = -3 \times 2^5 = 96$.

Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.

```
def algo2_1():
    for N in range(1,6):
        U=-3*(2**N)
    return U
```

```
def algo2_2():
    V=-3
    K=1
    while K<=5:
        V=2*V
        K=K+1
    return V
```

120 **1.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + 70$ et $B_{n+1} = 1{,}06 \times B_n$.

Alors, la suite (A_n) est arithmétique de raison 70 et de premier terme $A_0 = 1\,600$ et la suite (B_n) est géométrique de raison 1,06 et de premier terme $B_0 = 1\,300$.

2. a. À l'aide d'un tableur, on compare l'évolution des salaires. On peut ajouter une colonne de test avec l'instruction SI.

Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.

D3 =SI(C3>B3;"contrat B";"contrat A")

	A	B	C	D
2	n	A_n	B_n	Test
3	0	1 600,00	1 300,00	contrat A
4	1	1 670,00	1 378,00	contrat A
5	2	1 740,00	1 460,68	contrat A
6	3	1 810,00	1 548,32	contrat A
7	4	1 880,00	1 641,22	contrat A
8	5	1 950,00	1 739,69	contrat A
9	6	2 020,00	1 844,07	contrat A
10	7	2 090,00	1 954,72	contrat A
11	8	2 160,00	2 072,00	contrat A
12	9	2 230,00	2 196,32	contrat A
13	10	2 300,00	2 328,10	contrat B
14	11	2 370,00	2 467,79	contrat B
15	12	2 440,00	2 615,86	contrat B
16	13	2 510,00	2 772,81	contrat B
17	14	2 580,00	2 939,18	contrat B
18	15	2 650,00	3 115,53	contrat B
19	16	2 720,00	3 302,46	contrat B
20	17	2 790,00	3 500,60	contrat B
21	18	2 860,00	3 710,64	contrat B
22	19	2 930,00	3 933,28	contrat B
23	20	3 000,00	4 169,28	contrat B

c. D'après **b.**, la suite (u_n) géométrique de raison $q = 0{,}97$et de premier terme $u_0 = 1\,900$.
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0{,}97^n \times 1\,900$.
$2034 = 2014 + 20$. $u_{20} = 0{,}97^{20} \times 1\,900 \approx 1033$.
On peut estimer à 1 030 kW·h la quantité d'énergie produite en 2034.
d. On cherche le plus petit nombre entier naturel n, tel que $u_n < \frac{1}{2} u_0 \Leftrightarrow u_n < 950$.
$q \in]0 ; 1[$ et $u_0 > 0$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante. Et, à l'aide d'une table de valeurs obtenue à la calculatrice ou avec un tableur, on obtient : $u_{22} \approx 972 > 950$ et $u_{23} \approx 943 < 950$. $2014 + 23 = 2037$.
(On peut aussi remarquer : $u_n < \frac{1}{2}$;
$u_0 \Leftrightarrow 0{,}97^n \times 1\,900 < \frac{1}{2} \times 1\,900 \Leftrightarrow 0{,}97^n < \frac{1}{2}$)
L'installation aura perdu plus de la moitié de son rendement en 2037.
e. L'installation est garantie pendant 25 ans, donc on va calculer la quantité totale d'énergie produite de 2014 à 2038 et comparer le résultat à 20 000 kW.h, qui est le seuil de rentabilité financière.

$$\sum_{k=0}^{k=24} u_k = u_0 \times \frac{1-0{,}97^{25}}{1-0{,}97} = 1\,900 \times \frac{1-0{,}97^{25}}{0{,}03} \approx 33\,758 > 20\,000 .$$

On en déduit que l'installation est rentable.

127 **1.** *Voir le fichier tableur ressource dans le manuel numérique enseignant.*
a. Formule possible en B3 : = B2 + A3 .
b. Formule possible en C3 : = C2 + A3^3 .
2. a. Conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = S_n^2$.
Or, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$,
donc $T_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
b. Alors : $T_1 = \frac{1^2 \times 2^2}{4} = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$T_{n+1} - T_n = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} - \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$
$$= \frac{1}{4}(n+1)^2((n+2)^2 - n^2)$$
$$= \frac{1}{4}(n+1)^2(4n+4)$$
$$= (n+1)^2(n+1)$$
$$= (n+1)^3.$$

c. $T_n = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ donc
$$T_{n+1} - T_n = (1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3) - (1^3 + 2^3 + \dots + n^3)$$
$$= 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 - 1^3 - 2^3 - \dots - n^3$$
$= (n+1)^3$, ce qui en accord avec le résultat de la question précédente.

128 Pour tout nombre entier naturel n non nul, on note u_n le nombre d'étapes pour déplacer n disques.
1. $u_1 = 1$, car pour déplacer un disque une seule étape suffit.
2. Pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a déplacé $n - 1$ disques en u_{n-1} étapes, puis on déplace le $n^{\text{ème}}$ disque en une étape et ensuite on déplace les $n - 1$ disques sur le $n^{\text{ème}}$ disque en en u_{n-1} étapes, donc le nombre d'étapes minimal pour déplacer n disques est :
$u_n = u_{n-1} + 1 + u_{n-1} = 2u_{n-1} + 1$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n + 1$.
a. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = 2u_n + 1 + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) = 2v_n$.
$v_1 = u_1 + 1 = 2$. Alors la suite (v_n) est géométrique de raison 2 et de premier terme $v_1 = 2$.
b. Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_1 \times 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$.
D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = v_n - 1 = 2^n - 1$.
c. $u_8 = 2^8 - 1 = 255$. Pour déplacer un lot de huit disques, il faut au minimum 255 étapes.

129 **1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$.
Alors, la suite (C_n) est définie par : $C_1 = 1^2 = 1$ et $C_{n+1} = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = C_n + (n+1)^2$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
a. $u_1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$.
b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.
c. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)((n+2)(2n+3) - n(2n+1))}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6 - 2n^2 - n)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(6n+6)}{6} = (n+1)^2.$$

d. Les suites (C_n) et (u_n) sont définies par la même relation de récurrence et le même premier terme 1, donc elles sont égales.

3. $1^2+2^2+\ldots+195^2 = C_{195} = u_{195}$

$$= \frac{195\times(195+1)\times(2\times195+1)}{6}$$

$$= 2\,490\,670.$$

130 $f_0 = 1$, la longueur de L_0 .

1. On découpe L_1 en trois morceaux de longueur $\frac{1}{3}$ et on remplace le morceau du milieu par deux morceaux de longueur $\frac{1}{3}$, donc

$$f_1 = 4 \times \frac{f_0}{3} = 4 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

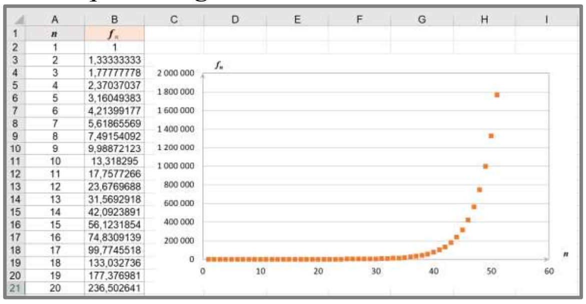
2. De même : $f_2 = 4 \times \frac{f_1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$.

3. a. De même : $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} = \frac{4}{3} f_n$.

b. On en déduit que (f_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{4}{3}$ et de premier terme $f_0 = 1$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n = 1 \times \left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(\frac{4}{3}\right)^n$.

c. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



	A	B
1	n	f_n
2	1	1
3	2	1,33333333
4	3	1,77777778
5	4	2,37037037
6	5	3,16049383
7	6	4,21399177
8	7	5,61865569
9	8	7,49154092
10	9	9,98872123
11	10	13,318295
12	11	17,7577266
13	12	23,6769688
14	13	31,5692918
15	14	42,0923891
16	15	56,1231854
17	16	74,8309139
18	17	99,7745518
19	18	133,032736
20	19	177,376981
21	20	236,502641

D'après le nuage de points, on peut conjecturer que (f_n) a une limite infinie : quand n devient de plus en plus grand, f_n aussi.

131 **1. a.** On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = t \times C_{n-1}$ et

$M = I_n + R_n = I_{n+1} + R_{n+1}$.

Alors : $R_{n+1} = I_n + R_n - I_{n+1}$

$= t \times C_{n-1} + R_n - t \times C_n$

$= R_n + t \times (C_{n-1} - C_n)$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $R_{n+1} = R_n + t \times (C_{n-1} - C_n)$

$= R_n + t \times R_n$

$= (1 + t) \times R_n$.

Alors (R_n) est la suite géométrique de raison $(1 + t)$ et de premier terme R_1.

c.

$$C_0 = \sum_{i=1}^{i=k} R_i = R_1 \times \frac{1-(1+t)^k}{1-(1+t)} = R_1 \times \frac{1-(1+t)^k}{-t}$$

$$= R_1 \times \frac{(1+t)^k - 1}{t}.$$

d. D'où : $R_1 = \frac{t}{(1+t)^k - 1} \times C_0$.

$M = I_1 + R_1$, donc :

$$M = t \times C_0 + \frac{t}{(1+t)^k - 1} \times C_0$$

$$= t \times C_0\left(1 + \frac{1}{(1+t)^k - 1}\right)$$

$$= t \times C_0 \times \frac{(1+t)^k - 1 + 1}{(1+t)^k - 1}$$

$$= t \times C_0 \times \frac{(1+t)^k}{(1+t)^k - 1}.$$

2. a. $C_0 = 15\,000$; $t = 0{,}2\,\% = 0{,}002$; $k = 12 \times 5 = 60$. D'où :

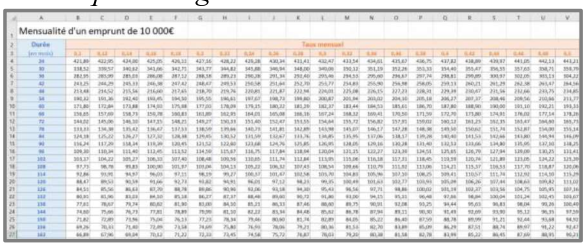
$$M = 0{,}002 \times 15\,000 \times \frac{(1+0{,}002)^{60}}{(1+0{,}002)^{60} - 1} \approx 265{,}55$$

b. *Remarque : Dans l'exemplaire de l'élève (Édition 02), la formule du coût de l' emprunt a été modifiée : remboursements – capital emprunté (différence et non somme).*

Coût total du crédit :

$k \times M - C_0 \approx 60 \times 265{,}55 - 15\,000 \approx 633$ € .

c. *Voir le fichier ressource dans le manuel numérique enseignant.*



d. On lit la mensualité 177,03 € pour 10 000 € empruntés donc pour 15 000 € empruntés, $M = 1{,}5 \times 177{,}03 = 265{,}545$ € qui est la valeur trouvée au **2.a.**

132 **1. a.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = \frac{1}{2} P_n$.

b. On en déduit que la suite (P_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $P_0 = 1 = 100\,\%$.