CHAPITRE 9

FONCTION EXPONENTIELLE

I. Définition et propriétés de la fonction exponentielle

Définition 1

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\begin{cases} f' = f \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On appelle cette fonction **la fonction exponentielle** ; elle est notée exp.
On note aussi $\exp(x) = \mathrm{e}^x$: c'est la notation exponentielle.
$\mathrm{e} = \mathrm{e}^1 = \exp(1)$ est la constante de NÉPER ; une valeur approchée est $\mathrm{e} \approx 2{,}718\,281\,828$

Proposition 1

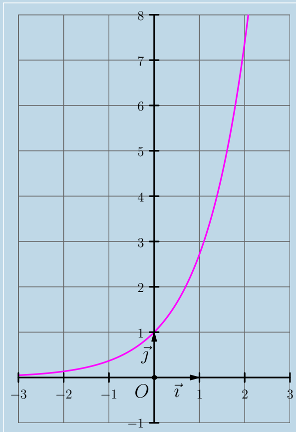
La fonction dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle : $\exp' = \exp$.

Proposition 2

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3

- $\mathrm{e}^0 = 1$.
- La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.
- La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,
  i.e. $a < b \Leftrightarrow \mathrm{e}^a < \mathrm{e}^b$.



Proposition 4 : Relation fonctionnelle de la fonction exponentielle

a et b sont deux nombres réels. Alors

$$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a \times \mathrm{e}^b$$

Proposition 5

On considère a et b des nombres réels et n un entier naturel. Alors

- $\mathrm{e}^{-a} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^a}$;
- $\mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b}$;
- $(\mathrm{e}^a)^n = \mathrm{e}^{an}$;
- $\sqrt{\mathrm{e}^a} = \mathrm{e}^{\frac{a}{2}}$.

Exemple 1

- $\mathrm{e}^{3x}\mathrm{e}^{2x}\mathrm{e} = \mathrm{e}^{5x+1}$.
- $\left(\mathrm{e}^{5x}\right)^2 = \mathrm{e}^{10x}$.
- $\dfrac{\mathrm{e}^{3x+3}}{\mathrm{e}^{2x-1}} = \mathrm{e}^{4x+4}$.
- $\dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{2-x}$.
- $\sqrt{\mathrm{e}^9} = \mathrm{e}^{4{,}5}$.
- $\mathrm{e}^{-x+7}\mathrm{e}^{5x-2} = \mathrm{e}^{4x+5}$.

N.B. : $\mathrm{e}^{x^2} \neq \left(\mathrm{e}^x\right)^2$: $\begin{cases} \mathrm{e}^{5^2} = \mathrm{e}^{25} \approx 72 \times 10^9 \\ \left(\mathrm{e}^5\right)^2 = \mathrm{e}^{10} \approx 22 \times 10^3 \end{cases}$.

II. Fonctions composées par la fonction exponentielle

Définition 2

On considère u une fonction définie sur un intervalle I.
On créé une nouvelle fonction $\exp(u)$ que l'on note aussi e^u par $x \longmapsto e^{u(x)}$.

Proposition 6

On considère u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Alors e^u est dérivable sur I et : $\left(e^u\right)' = u' \times e^u$.
En outre, les fonctions u et e^u ont les mêmes variations sur I.

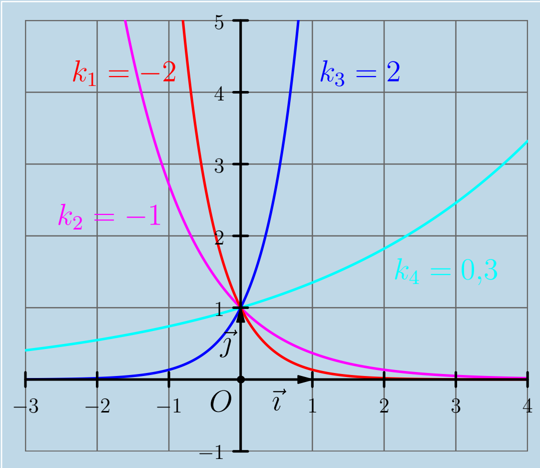
Exemple 2

- Si $g(x) = e^{-6x+1}$, alors $g'(x) = -6e^{-6x+1}$.
- Si $h(x) = e^{2x^2-x}$, alors $h'(x) = (4x-1)\,e^{2x^2-x}$.

Proposition 7

Une fonction de la forme $x \longmapsto e^{kx}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa fonction dérivée est $x \longmapsto ke^{kx}$.
Les fonctions $x \longmapsto e^{kx}$ vérifient l'équation différentielle $y' = ky$. Elles modélisent des phénomènes à évolution relative constante

- cas $k < 0$: radioactivité, décharge d'un condensateur ;
- cas $k > 0$: population où le taux d'accroissement naturel est constant.



III. Lien avec les suites géométriques

Proposition 8

- Pour tout nombre réel k, la suite $\left(e^{kn}\right)$ est la suite géométrique de premier terme 1 et de raison e^a.
- Pour tout nombre réel $q > 0$, il existe un unique nombre réel a tel que $q = e^k$.
  Ainsi, toute suite géométrique de terme général q^n se prolonge en une fonction $x \longmapsto e^{kx}$, que l'on peut noter $x \longmapsto q^x$.

Exemple 3

- Les suites $\left(e^{1{,}5n}\right)$ et $\left(e^{-0{,}3n}\right)$ sont géométriques de raison respective $e^{1{,}5}$ et $e^{-0{,}2}$.
- La suite $\left(1{,}2^n\right)$ se prolonge en la fonction $x \longmapsto e^{kx}$ où k est tel que $e^k = 1{,}2$ (on trouve $k \approx 0{,}182$) ; on peut noter cette fonction $x \longmapsto 1{,}2^x$.