Conditionnement

I. Probabilités conditionnelles

Définition 1

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire. On suppose que $\mathbf{P}(\mathrm{A}) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'événement B **sachant que l'événement** A **est réalisé**, que l'on appelle **probabilité de** B **sachant** A par abus de langage, est le nombre $\mathbf{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ défini par

$$\mathbf{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathbf{P}(\mathrm{A})}.$$

Remarque : Dans un cas fini, c'est le rapport entre le nombre d'éléments de l'univers présents dans A et réalisant B (soit l'ensemble $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$) et le nombre d'éléments dans A.

Proposition 1

A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire. On suppose que $\mathbf{P}(\mathrm{A}) \neq 0$.

- $0 \leqslant \mathbf{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \leqslant 1$;
- $\mathbf{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) + \mathbf{P}_{\mathrm{A}}\left(\overline{\mathrm{B}}\right) = 1$.

Exemple 1

Parmi les habitants des quartiers Evergreen (événement E) et Melrose (événement M), on s'intéresse aux possesseurs de téléphone de marque Pear (événement P) et Cyborg (événement C).

- Dans l'échantillon étudié, il y a deux fois plus d'habitants du quartier Evergreen que Melrose.
- Parmi les habitants d'Evergreen, 45 % possèdent un téléphone de marque Pear.
- 68 % des habitants de Melrose ont opté pour un téléphone de marque Cyborg.

1. Traduire les données sous forme de probabilités, éventuellement conditionnelles.
2. Donner les valeurs de $\mathbf{P}_{\mathrm{E}}\left(\overline{\mathrm{P}}\right)$ et $\mathbf{P}_{\overline{\mathrm{E}}}\left(\overline{\mathrm{P}}\right)$.

Proposition 2

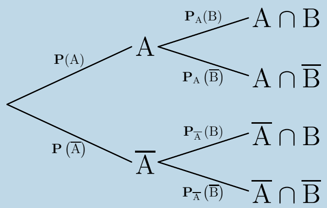
A et B sont deux événements d'une expérience aléatoire.
On suppose que les événements A et B sont non impossibles, *i.e.* que $\mathbf{P}(\mathrm{A}) \neq 0$ et que $\mathbf{P}(\mathrm{B}) \neq 0$.

$$\mathbf{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathbf{P}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) \times \mathbf{P}(\mathrm{A}) = \mathbf{P}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}) \times \mathbf{P}(\mathrm{B}).$$

II. Probabilités totales

Proposition 3

Dans une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B. On peut représenter la situation par **un arbre de probabilités**.



Remarque : Par abus d'écriture, on omet souvent de préciser l'intersection pour les nœuds au-delà du deuxième étage. Ainsi, dans la propriété précédente, on obtiendrait le même arbre mais avec uniquement B ou $\overline{\mathrm{B}}$ au deuxième étage.

Proposition 4

Voici trois règles régissant les arbres pondérés

- La somme des probabilités issues d'un même nœud fait 1.
- La probabilité d'un chemin vaut le produit des probabilités inscrites sur chaque branche parcourue.
- La probabilité d'un événement correspondant à plusieurs chemins est la somme de des probabilités de chaque chemin.

Exemple 2

En reprenant l'exemple précédent, déterminer **P**(C). Interpréter cette valeur.

Proposition 5 : Formule des probabilités totales

On considère $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$, chacun non impossible, deux à deux incompatibles et tels que leur réunion est l'univers Ω.

On a ainsi : pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbf{P}\left(\mathrm{A}_k\right) \neq 0$, $i \neq j \Rightarrow \mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \varnothing$ et $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{A}_k = \Omega$.

On dit alors que la famille $(\mathrm{A}_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une partition de l'univers Ω ou encore que c'est un système complet d'événements.

Alors, pour tout événement B,

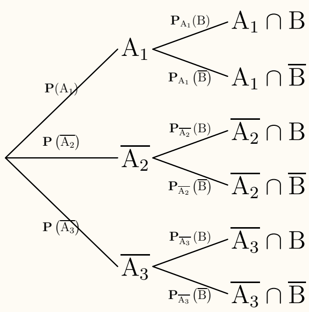
$$\mathbf{P}(\mathrm{B}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\mathrm{A}_k \cap \mathrm{B}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(\mathrm{A}_k) \times \mathbf{P}_{\mathrm{A}_k}(\mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}_1) \times \mathbf{P}_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}) + \cdots + \mathbf{P}(\mathrm{A}_n) \times \mathbf{P}_{\mathrm{A}_n}(\mathrm{B}).$$

Exemple 3

Pour réaliser l'événement B, on a trois possibilités :

- réaliser $\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}$, de probabilité $\mathbf{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B})$;
- réaliser $\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}$, de probabilité $\mathbf{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B})$;
- réaliser $\mathrm{A}_3 \cap \mathrm{B}$, de probabilité $\mathbf{P}(\mathrm{A}_3 \cap \mathrm{B})$;

et donc $\mathbf{P}(\mathrm{B}) = \mathbf{P}(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}) + \mathbf{P}(\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}) + \mathbf{P}(\mathrm{A}_3 \cap \mathrm{B})$.



Exemple 4

En reprenant l'exemple précédent, présenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

III. Indépendance

Définition 2

On considère A et B deux événements non impossibles.
A et B sont **indépendants** si $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$.

Remarque : La non-indépendance, la corrélation et la causalité sont des notions distinctes.

Exemple 5

En reprenant l'exemple précédent, déterminer si les événements P et C sont indépendants. Interpréter le résultat.

Proposition 6

Si A et B sont **indépendants**, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

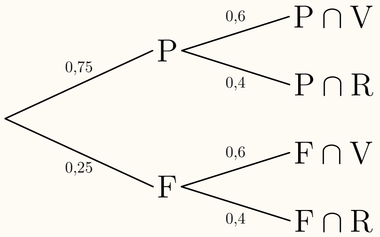
Démonstration

Proposition 7

On considère A et B deux événements non impossibles, *i.e.* que $\mathbf{P}(A) \neq 0$ et que $\mathbf{P}(B) \neq 0$.
Les événements A et B sont **indépendants**
$\Longleftrightarrow \mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)$
$\Longleftrightarrow \mathbf{P}_A(B) = \mathbf{P}(B)$
$\Longleftrightarrow \mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$

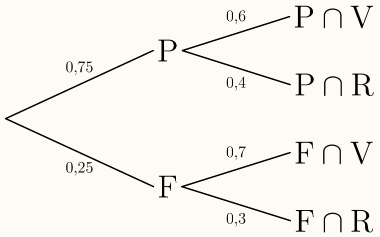
Exemple 6

On lance une pièce truquée qui a une probabilité de faire « pile » avec $\dfrac{3}{4}$.
Si la pièce fait « pile », on pioche une boule dans l'urne $U_1 = \{$ 3 boules vertes, 2 rouges$\}$.
Si la pièce fait « face », on pioche une boule dans l'urne $U_2 = \{$ 9 boules vertes, 6 rouges$\}$.



Et par exemple,
$\mathbf{P}(V) = 0{,}75 \times 0{,}6 + 0{,}25 \times 0{,}6 = 0{,}6$
puis $\mathbf{P}(P) \times \mathbf{P}(V) = 0{,}75 \times 0{,}6 = 0{,}45$ et
$\mathbf{P}(P \cap V) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$
donc les événements P et V sont indépendants : le résultat du pile ou face n'influe pas sur les résultats du tirage de l'urne.

On lance une pièce truquée qui a une probabilité de faire « pile » avec $\dfrac{3}{4}$.
Si la pièce fait « pile », on pioche une boule dans l'urne $U_1 = \{$ 3 boules vertes, 2 rouges$\}$.
Si la pièce fait « face », on pioche une boule dans l'urne $U_2 = \{$ 7 boules vertes, 3 rouges$\}$.



Et par exemple,
$\mathbf{P}(V) = 0{,}75 \times 0{,}6 + 0{,}25 \times 0{,}7 = 0{,}625$
puis $\mathbf{P}(P) \times \mathbf{P}(V) = 0{,}75 \times 0{,}625 = 0{,}46\,875$ et
$\mathbf{P}(P \cap V) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$
donc les événements P et V ne sont pas indépendants : le résultat du pile ou face a une influence numérique sur les résultats du tirage de l'urne.