CHAPITRE 5

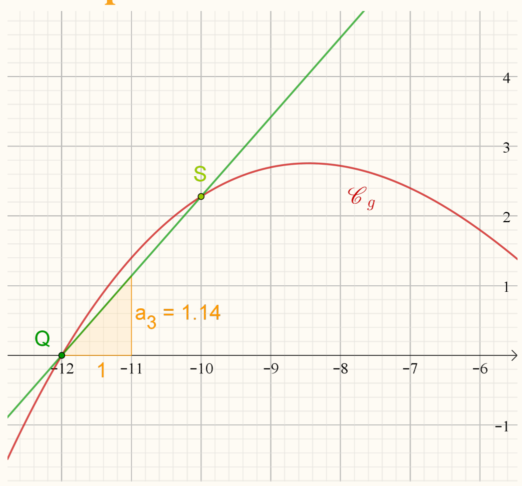
DÉRIVATION

I. Sécantes, tangentes à une courbe

Définition 1

f est une fonction définie sur un intervalle I, A et B sont deux points de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.
La droite (AB) est une **sécante** de la courbe $\mathscr{C}_f$ et le segment [AB] est une **corde** de la courbe $\mathscr{C}_f$.

Exemple 1



Le taux d'accroissement de la fonction g entre -12 et -10 vaut $\frac{f(-10)-f(-12)}{2} \approx \frac{2{,}28-0}{2} = 1{,}14$.

Proposition 1

f est une fonction définie sur un intervalle I, $\mathrm{A}\,(a\,;f(a))$ est un point de la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.
Si $h \neq 0$ est un nombre réel et $\mathrm{M}\,(a+h\,;f(a+h))$ est un autre point de $\mathscr{C}_f$, la pente de la sécante (AM) est appelé **taux d'accroissement de f entre a et $a+h$** et vaut

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Exemple 2

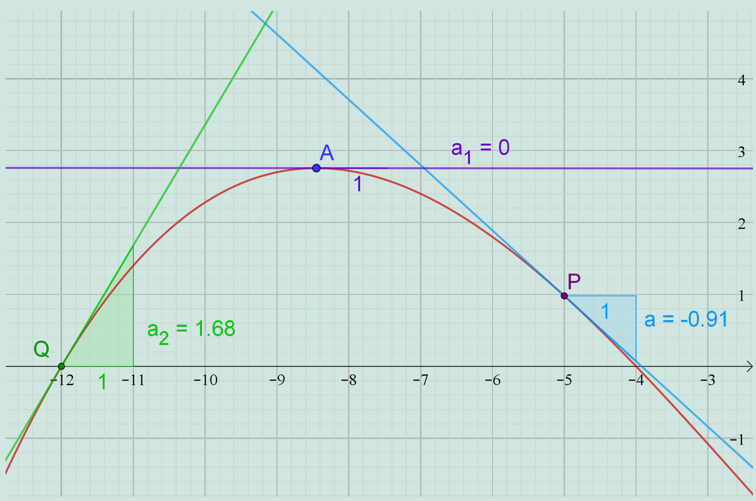
On note $c(x) = x^2$, $\mathrm{A}(2\,;4)$ et $\mathrm{M}\left(2+h\,;(2+h)^2\right) = \left(2+h\,;4+4h+h^2\right)$. A et M sont des points de$\mathscr{C}_c$.

La pente de la sécante (AM) vaut : $\frac{c(2+h)-c(2)}{h} = \frac{\left(4+4h+h^2\right)-4}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = \frac{h(4+h)}{h} = 4+h$.

On remarque que bien que le rapport $\frac{c(2+h)-c(2)}{h}$ ne soit pas défini pour $h=0$, on peut donner un sens à cette expression pour $h=0$ après simplification.

Définition 2

Dans la situation précédente, si $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ est défini pour $h \to 0$ (après simplification, le taux d'accroissement a un sens pour $h=0$), on dit que **la fonction f est dérivable en a**.
Graphiquement, cela implique que les sécantes tendent à former une droite possédant une pente quand $h \to 0$.
Cette droite obtenue est appelée **tangente** à la courbe $\mathscr{C}_f$ en a et sa pente est **le nombre dérivé de f en a**, noté $f'(a)$, parfois $\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_a$.



Exemple 3

Par lecture graphique, $g'(-12) \approx 1{,}68$, $g'(x_{\mathrm{A}}) \approx 0$ et $g'(-5) \approx -0{,}91$.

Proposition 2 : approximation locale

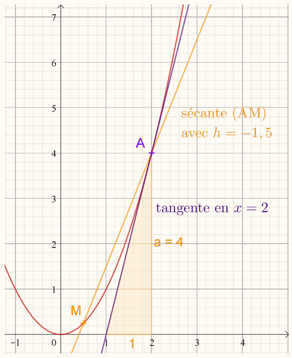
Pour une fonction f dérivable au voisinage de a, le nombre dérivé $f'(a)$ correspond à une mesure algébrique (négative ou positive) de l'évolution de $f(x)$ au voisinage de a.
On a l'approximation : pour $h \approx 0$, $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$.

Exemple 4

En reprenant l'exemple précédent, $\frac{c(2+h)-c(2)}{h} = 4+h$ et pour $h \to 0$, on a $\frac{c(2+h)-c(2)}{h} = 4+h \to 4$.

Ainsi, la fonction c est dérivable en 2 et $c'(2) = 4$.

Graphiquement, la tangente à $\mathscr{C}_c$ en 2 a une pente valant 4.



Proposition 3 : équation d'une tangente

Pour une fonction f dérivable en a, une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en a est

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

N.B. : La tangente à la courbe d'une fonction f en a est une droite qui « approche localement » cette courbe.

Exemple 5

Comme $c'(2) = 4$ et $c(2) = 4$, une équation de la tangente à la fonction carré en 2 est
$y = 4 + 4(x-2) \Leftrightarrow y = 4x - 4$.

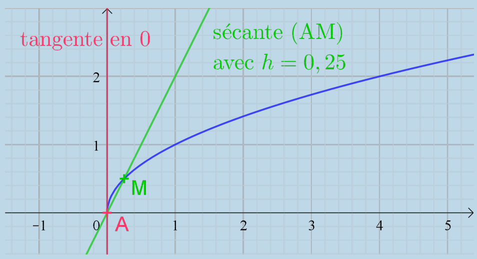
II. Cas de non-dérivabilité

Exemple 6

Le taux d'accroissement de la fonction racine carrée entre 0 et $h > 0$ vaut $\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$.
Cette quantité demeure non définie pour $h \to 0$: la fonction racine carrée n'est donc pas dérivable en 0.

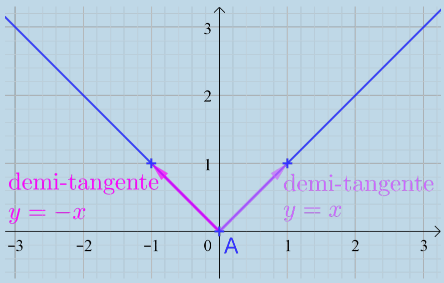
Proposition 4

La fonction racine carrée est non-dérivable en 0.
Sa courbe admet comme tangente en 0 la droite d'équation $x = 0$ qui ne possède pas de pente.



Proposition 5

La fonction valeur absolue est non dérivable en 0.
Sa courbe admet deux demi-tangentes en 0 : les demi-droites d'équation $y = -x$ et $y = x$.



III. Fonctions dérivées de fonctions polynomiales

Définition 3

Une fonction f définie sur un intervalle I est **dérivable sur** I si elle est dérivable pour tout nombre réel $a \in \mathrm{I}$.
On note cette fonction f' (« f prime ») et parfois $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

Proposition 6 : fonctions dérivées des fonctions de référence

Ensemble de définition	Expression de la fonction	Ensemble de dérivation	Expression de la fonction dérivée
$\mathbb{R}$	$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
$\mathbb{R}$	$f(x) = x^n$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$\mathbb{R}^\times$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^\times$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$\mathbb{R}_+$	$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^\times$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Proposition 7

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un nombre réel, alors :

- la fonction ku est dérivable sur I et $(ku)' = k \times u'$;
- la fonction $u + v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.

Exemple 7

- Si $f(x) = 4x^2$, alors $f'(x) = 4 \times 2x = 8x$.
- Si $h(t) = 5t^3 - 4t + 2$, alors $h'(t) = 5 \times 3t^2 - 4 \times 1 + 0 = 15t^2 - 4$.
- Si $q(x) = \frac{1}{x^6} = x^{-6}$, alors $q'(x) = -6x^{-7} = \frac{-6}{x^7}$.

Exemple 8

Avec $g(x) = x + \sqrt{x}$, on a $g(1) = 2$ et $g'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$ donc $g'(1) = 1{,}5$.
Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ est $y = 2 + 1{,}5(x-1) \Leftrightarrow y = 1{,}5x + 0{,}5$.

Proposition 8

- Si une fonction $t \mapsto x(t)$ correspond à un mouvement cinématique (le déplacement $x(t)$ exprimé en fonction du temps t), la fonction dérivée x' correspond à la vitesse instantanée.
- Si une fonction C correspond à un coût (le coût total $\mathrm{C}(q)$ en fonction du nombre d'objets q), la fonction dérivée C' correspond au coût marginal (coût d'une unité supplémentaire).

Définition 4

Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I et que sa fonction dérivée f' est aussi dérivable sur I, alors on peut définir sa **dérivée seconde** f'' (« f seconde »).
On peut définir de même f''' (« f tierce »), $f^{(4)}$, *etc.*

Exemple 9

Si $x(t) = -4{,}9t^2 + 3{,}2t + 2$, alors $x'(t) = -9{,}8t + 3{,}2$ et $x''(t) = -9{,}8$.